Explizite Konstruktion von Expandergraphen

Kathlén Kohn   Caterina Schneider

Sommerakademie Görlitz 2013

Ziel

Ziel

Familie von regulären Graphen mit

- wachsender Knotenzahl
- konstantem Grad
- spektraler Expansion $\frac{1}{2}$

Ziel

Familie von regulären Graphen mit

- wachsender Knotenzahl
- konstantem Grad
- spektraler Expansion $\frac{1}{2}$

Idee: Starte mit festem Graphen und wende Graphoperationen an

Ziel

Familie von regulären Graphen mit

- wachsender Knotenzahl
- konstantem Grad
- spektraler Expansion $\frac{1}{2}$

Idee: Starte mit festem Graphen und wende Graphoperationen an

Definition

Ein (N, D, γ)-Graph

- hat N Knoten,
- ist D-regulär,
- und hat spektrale Expansion γ.

Gliederung

Gliederung

Graphoperationen

Graphoperationen

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein D-regulärer Graph, $x \in V$, $i \in \{1, \dots, D\}$.

$$V \ni N_i^G(x) := i\text{-ter Nachbar von } x \text{ in } G$$

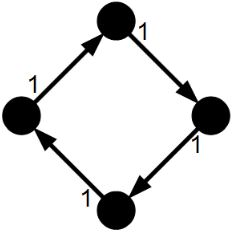
Gliederung

Quadrierung

Quadrierung

Definition

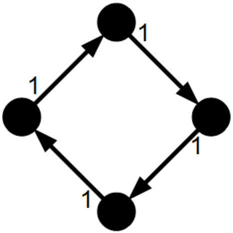
Sei $G = (V, E)$ ein D-regulärer gerichteter Multigraph.



Quadrierung

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein D-regulärer gerichteter Multigraph.



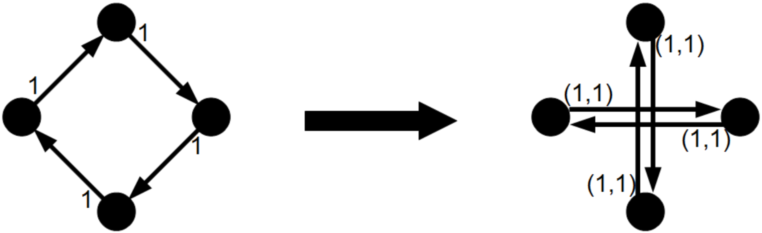
$G^2 := (V, E')$, wobei

$$\forall x \in V : N^{G^2}_{(i,j)}(x) := N^G_j\left(N^G_i(x)\right)$$

Quadrierung

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein D-regulärer gerichteter Multigraph.



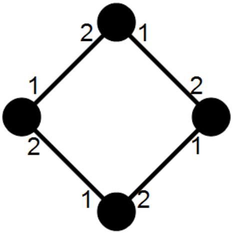
$G^2 := (V, E')$, wobei

$$\forall x \in V : N^{G^2}_{(i,j)}(x) := N^G_j\left(N^G_i(x)\right)$$

Quadrierung

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein D-regulärer gerichteter Multigraph.



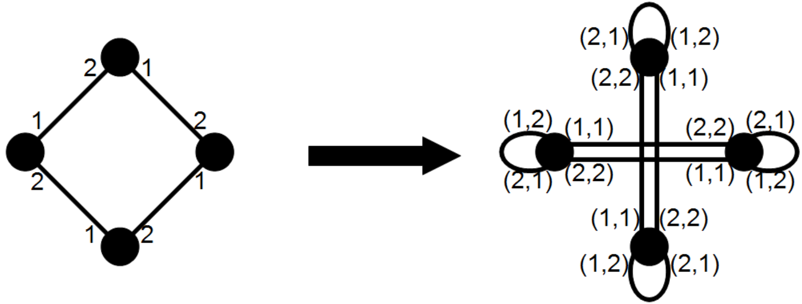
$G^2 := (V, E')$, wobei

$$\forall x \in V : N_{(i,j)}^{G^2}(x) := N_j^G\left(N_i^G(x)\right)$$

Quadrierung

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein D-regulärer gerichteter Multigraph.



$G^2 := (V, E')$, wobei

$$\forall x \in V : N^{G^2}_{(i,j)}(x) := N^G_j\left(N^G_i(x)\right)$$

Quadrierung

Lemma

Sei G ein $(N, D, 1-\lambda)$-Graph. Dann ist G^2 ein $(N, D^2, 1-\lambda^2)$-Graph.

Quadrierung

Lemma

Sei G ein $(N, D, 1-\lambda)$-Graph. Dann ist G^2 ein $(N, D^2, 1-\lambda^2)$-Graph.

Beweis.

- M Irrfahrtsmatrix von $G \Rightarrow M^2$ Irrfahrtsmatrix von G^2

Quadrierung

Lemma

Sei G ein $(N, D, 1-\lambda)$-Graph. Dann ist G^2 ein $(N, D^2, 1-\lambda^2)$-Graph.

Beweis.

- M Irrfahrtsmatrix von $G \Rightarrow M^2$ Irrfahrtsmatrix von G^2
- Erinnerung:

$$\lambda \geq \lambda(G) := \max_{x \perp u} \frac{\|xM\|}{\|x\|}$$

Quadrierung

Lemma

Sei G ein $(N, D, 1-\lambda)$-Graph. Dann ist G^2 ein $(N, D^2, 1-\lambda^2)$-Graph.

Beweis.

- M Irrfahrtsmatrix von $G \Rightarrow M^2$ Irrfahrtsmatrix von G^2
- Erinnerung:

$$\lambda \geq \lambda(G) := \max_{x \perp u} \frac{\|xM\|}{\|x\|}$$
$$\Rightarrow \forall x \perp u : \|xM\| \leq \lambda \|x\|$$

Gliederung

Graphoperationen

- Quadrierung
- Tensorprodukt
- Zick-Zack Produkt

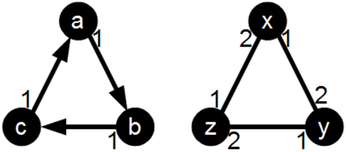
Explizite Konstruktion

Tensorprodukt

Tensorprodukt

Definition

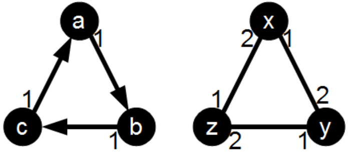
Sei $G_1 = (V_1, E_1)$ ein D_1-regulärer und $G_2 = (V_2, E_2)$ ein D_2-regulärer gerichteter Multigraph.



Tensorprodukt

Definition

Sei $G_1 = (V_1, E_1)$ ein D_1-regulärer und $G_2 = (V_2, E_2)$ ein D_2-regulärer gerichteter Multigraph.



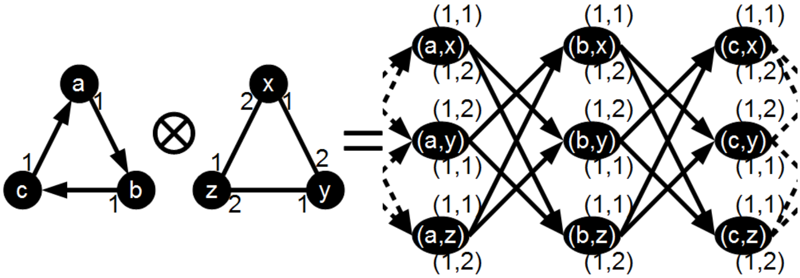
$G_1 \otimes G_2 := (V_1 \times V_2, E)$, wobei

$$\forall (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 : N_{(i,j)}^{G_1 \otimes G_2}(x_1, x_2) = \left(N_i^{G_1}(x_1), N_j^{G_2}(x_2) \right)$$

Tensorprodukt

Definition

Sei $G_1 = (V_1, E_1)$ ein D_1-regulärer und $G_2 = (V_2, E_2)$ ein D_2-regulärer gerichteter Multigraph.



$G_1 \otimes G_2 := (V_1 \times V_2, E)$, wobei

$$\forall (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 : N_{(i,j)}^{G_1 \otimes G_2}(x_1, x_2) = \left(N_i^{G_1}(x_1), N_j^{G_2}(x_2) \right)$$

Tensorprodukt

Lemma

Sei G_1 ein (N_1, D_1, γ_1)-Graph und G_2 ein (N_2, D_2, γ_2)-Graph. Dann ist $G_1 \otimes G_2$ ein $(N_1 N_2, D_1 D_2, \min\{\gamma_1, \gamma_2\})$.

Tensorprodukt von Vektoren

Tensorprodukt von Vektoren

Definition

Sei $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \in \mathbb{R}^{N_2}$.

$$x \otimes y \in \mathbb{R}^{N_1 N_2} \text{ mit } (x \otimes y)_{i,j} := x_i y_j$$

Tensorprodukt von Vektoren

Definition

Sei $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \in \mathbb{R}^{N_2}$.

$$x \otimes y \in \mathbb{R}^{N_1 N_2} \text{ mit } (x \otimes y)_{i,j} := x_i y_j$$

$$x \otimes y \simeq \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_{N_2} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N_1} y_1 & \cdots & x_{N_1} y_{N_2} \end{bmatrix}$$

Tensorprodukt von Vektoren

Definition

Sei $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \in \mathbb{R}^{N_2}$.

$$x \otimes y \in \mathbb{R}^{N_1 N_2} \text{ mit } (x \otimes y)_{i,j} := x_i y_j$$

$$\begin{aligned} x \otimes y &\simeq \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_{N_2} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N_1} y_1 & \cdots & x_{N_1} y_{N_2} \end{bmatrix} \\ &\simeq \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_{N_2} & \cdots & x_{N_1} y_1 & \cdots & x_{N_1} y_{N_2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Tensorprodukt von Vektoren

Definition

Sei $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \in \mathbb{R}^{N_2}$.

$$x \otimes y \in \mathbb{R}^{N_1 N_2} \text{ mit } (x \otimes y)_{i,j} := x_i y_j$$

$$\begin{aligned} x \otimes y &\simeq \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_{N_2} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N_1} y_1 & \cdots & x_{N_1} y_{N_2} \end{bmatrix} \\ &\simeq \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_{N_2} & \cdots & x_{N_1} y_1 & \cdots & x_{N_1} y_{N_2} \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 y & \cdots & x_{N_1} y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tensorprodukt von Matrizen

Tensorprodukt von Matrizen

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$.

$$A \otimes B \in \mathbb{R}^{N_1 N_2 \times N_1 N_2} \text{ mit } (A \otimes B)_{(i,j),(i',j')} := a_{i,i'} b_{j,j'}$$

Tensorprodukt von Matrizen

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$.

$$A \otimes B \in \mathbb{R}^{N_1 N_2 \times N_1 N_2} \text{ mit } (A \otimes B)_{(i,j),(i',j')} := a_{i,i'} b_{j,j'}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,N_1}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N_1,1}B & \cdots & a_{N_1,N_1}B \end{bmatrix}$$

Tensorprodukt

Tensorprodukt

- M_1 Irrfahrtsmatrix von G_1, M_2 Irrfahrtsmatrix von G_2
  $\Rightarrow M_1 \otimes M_2$ Irrfahrtsmatrix von $G_1 \otimes G_2$

Tensorprodukt

- M_1 Irrfahrtsmatrix von G_1, M_2 Irrfahrtsmatrix von G_2
  $\Rightarrow M_1 \otimes M_2$ Irrfahrtsmatrix von $G_1 \otimes G_2$
- $(M_1 \otimes I_{N_2})(I_{N_1} \otimes M_2) = M_1 \otimes M_2 = (I_{N_1} \otimes M_2)(M_1 \otimes I_{N_2})$

Tensorprodukt

- M_1 Irrfahrtsmatrix von G_1, M_2 Irrfahrtsmatrix von G_2
  $\Rightarrow M_1 \otimes M_2$ Irrfahrtsmatrix von $G_1 \otimes G_2$
- $(M_1 \otimes I_{N_2})(I_{N_1} \otimes M_2) = M_1 \otimes M_2 = (I_{N_1} \otimes M_2)(M_1 \otimes I_{N_2})$
- $$(x \otimes y)(A \otimes B) = \begin{pmatrix} x_1 y & \cdots & x_{N_1} y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,N_1}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N_1,1}B & \cdots & a_{N_1,N_1}B \end{bmatrix}$$

Tensorprodukt

- M_1 Irrfahrtsmatrix von G_1, M_2 Irrfahrtsmatrix von G_2
  $\Rightarrow M_1 \otimes M_2$ Irrfahrtsmatrix von $G_1 \otimes G_2$
- $(M_1 \otimes I_{N_2})(I_{N_1} \otimes M_2) = M_1 \otimes M_2 = (I_{N_1} \otimes M_2)(M_1 \otimes I_{N_2})$
- $$\begin{aligned}(x \otimes y)(A \otimes B) &= \begin{pmatrix} x_1 y & \cdots & x_{N_1} y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,N_1}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N_1,1}B & \cdots & a_{N_1,N_1}B \end{bmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N_1} x_i a_{i,1} yB \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{N_1} x_i a_{i,N_1} yB \right)\end{aligned}$$

Tensorprodukt

- M_1 Irrfahrtsmatrix von G_1, M_2 Irrfahrtsmatrix von G_2
  $\Rightarrow M_1 \otimes M_2$ Irrfahrtsmatrix von $G_1 \otimes G_2$
- $(M_1 \otimes I_{N_2})(I_{N_1} \otimes M_2) = M_1 \otimes M_2 = (I_{N_1} \otimes M_2)(M_1 \otimes I_{N_2})$
- $$\begin{aligned}(x \otimes y)(A \otimes B) &= \begin{pmatrix} x_1 y & \cdots & x_{N_1} y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,N_1}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N_1,1}B & \cdots & a_{N_1,N_1}B \end{bmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N_1} x_i a_{i,1} yB \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{N_1} x_i a_{i,N_1} yB \right) \\ &= (xA) \otimes (yB)\end{aligned}$$

Tensorprodukt

Lemma

Sei G_1 *ein* (N_1, D_1, γ_1)*-Graph und* G_2 *ein* (N_2, D_2, γ_2)*-Graph. Dann ist* $G_1 \otimes G_2$ *ein* $(N_1 N_2, D_1 D_2, \min\{\gamma_1, \gamma_2\})$*.*

Tensorprodukt

Lemma

Sei G_1 ein (N_1, D_1, γ_1)-Graph und G_2 ein (N_2, D_2, γ_2)-Graph. Dann ist $G_1 \otimes G_2$ ein $(N_1 N_2, D_1 D_2, \min\{\gamma_1, \gamma_2\})$.

Beweis.

Sei $x \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$ mit $x \perp u_{N_1 N_2}$.

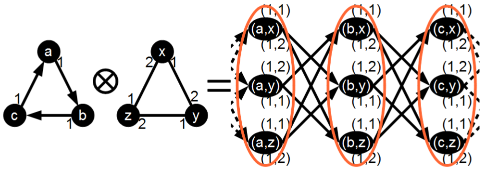
Tensorprodukt

Lemma

Sei G_1 ein (N_1, D_1, γ_1)-Graph und G_2 ein (N_2, D_2, γ_2)-Graph. Dann ist $G_1 \otimes G_2$ ein $(N_1 N_2, D_1 D_2, \min\{\gamma_1, \gamma_2\})$.

Beweis.

Sei $x \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$ mit $x \perp u_{N_1 N_2}$.



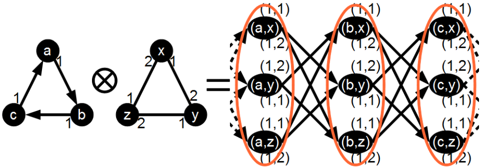
Tensorprodukt

Lemma

Sei G_1 ein (N_1, D_1, γ_1)-Graph und G_2 ein (N_2, D_2, γ_2)-Graph. Dann ist $G_1 \otimes G_2$ ein $(N_1 N_2, D_1 D_2, \min\{\gamma_1, \gamma_2\})$.

Beweis.

Sei $x \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$ mit $x \perp u_{N_1 N_2}$.



$$x = \begin{pmatrix} x^{(1)} & \cdots & x^{(N_1)} \end{pmatrix}$$

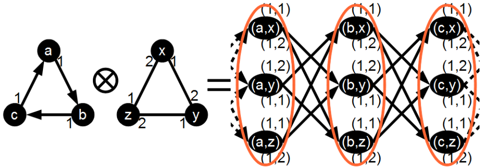
Tensorprodukt

Lemma

Sei G_1 ein (N_1, D_1, γ_1)-Graph und G_2 ein (N_2, D_2, γ_2)-Graph. Dann ist $G_1 \otimes G_2$ ein $(N_1 N_2, D_1 D_2, \min\{\gamma_1, \gamma_2\})$.

Beweis.

Sei $x \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$ mit $x \perp u_{N_1 N_2}$.



$$x = \begin{pmatrix} x^{(1)} & \cdots & x^{(N_1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\langle x^{(1)}, u_{N_2} \rangle}{\langle u_{N_2}, u_{N_2} \rangle} u_{N_2} & \cdots & \frac{\langle x^{(N_1)}, u_{N_2} \rangle}{\langle u_{N_2}, u_{N_2} \rangle} u_{N_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^{(1)\perp} & \cdots & x^{(N_1)\perp} \end{pmatrix}$$

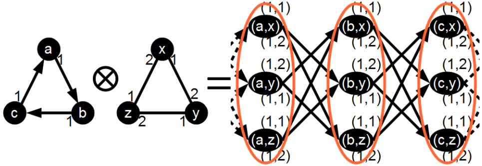
Tensorprodukt

Lemma

Sei G_1 ein (N_1, D_1, γ_1)-Graph und G_2 ein (N_2, D_2, γ_2)-Graph. Dann ist $G_1 \otimes G_2$ ein $(N_1 N_2, D_1 D_2, \min\{\gamma_1, \gamma_2\})$.

Beweis.

Sei $x \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$ mit $x \perp u_{N_1 N_2}$.



$$
\begin{aligned}
x &= \begin{pmatrix} x^{(1)} & \cdots & x^{(N_1)} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\langle x^{(1)}, u_{N_2} \rangle}{\langle u_{N_2}, u_{N_2} \rangle} u_{N_2} \quad \cdots \quad \frac{\langle x^{(N_1)}, u_{N_2} \rangle}{\langle u_{N_2}, u_{N_2} \rangle} u_{N_2} \right) + \begin{pmatrix} x^{(1)\perp} & \cdots & x^{(N_1)\perp} \end{pmatrix} \\
&= y \otimes u_{N_2} + x^{\perp}
\end{aligned}
$$

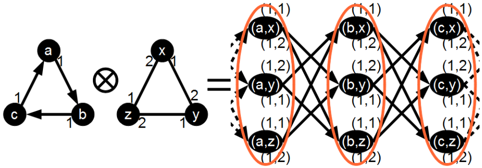
Tensorprodukt

Lemma

Sei G_1 ein (N_1, D_1, γ_1)-Graph und G_2 ein (N_2, D_2, γ_2)-Graph. Dann ist $G_1 \otimes G_2$ ein $(N_1 N_2, D_1 D_2, \min\{\gamma_1, \gamma_2\})$.

Beweis.

Sei $x \in \mathbb{R}^{N_1 N_2}$ mit $x \perp u_{N_1 N_2}$.



$$
\begin{aligned}
x &= \begin{pmatrix} x^{(1)} & \cdots & x^{(N_1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\langle x^{(1)}, u_{N_2} \rangle}{\langle u_{N_2}, u_{N_2} \rangle} u_{N_2} & \cdots & \frac{\langle x^{(N_1)}, u_{N_2} \rangle}{\langle u_{N_2}, u_{N_2} \rangle} u_{N_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^{(1)\perp} & \cdots & x^{(N_1)\perp} \end{pmatrix} \\
&= y \otimes u_{N_2} + x^{\perp}
\end{aligned}
$$

mit $y \perp u_{N_1}$ und $x^{(i)\perp} \perp u_{N_2}$

Tensorprodukt

Beweis.

$x = y \otimes u_{N_2} + x^{\perp}$ mit $y \perp u_{N_1}$, $x^{(i)\perp} \perp u_{N_2}$ und $x \perp u_{N_1 N_2}$

Tensorprodukt

Beweis.

$x = y \otimes u_{N_2} + x^{\perp}$ mit $y \perp u_{N_1}$, $x^{(i)\perp} \perp u_{N_2}$ und $x \perp u_{N_1 N_2}$

- $\|(y \otimes u_{N_2})(M_1 \otimes M_2)\|^2 \leq (1 - \gamma_1)^2 \|y \otimes u_{N_2}\|^2$

Tensorprodukt

Beweis.

$x = y \otimes u_{N_2} + x^{\perp}$ mit $y \perp u_{N_1}$, $x^{(i)\perp} \perp u_{N_2}$ und $x \perp u_{N_1 N_2}$

- $\|(y \otimes u_{N_2})(M_1 \otimes M_2)\|^2 \leq (1 - \gamma_1)^2 \|y \otimes u_{N_2}\|^2$
- $\|x^{\perp}(M_1 \otimes M_2)\|^2 \leq (1 - \gamma_2)^2 \|x^{\perp}\|^2$

Tensorprodukt

Beweis.

$x = y \otimes u_{N_2} + x^{\perp}$ mit $y \perp u_{N_1}$, $x^{(i)\perp} \perp u_{N_2}$ und $x \perp u_{N_1 N_2}$

- $\|(y \otimes u_{N_2})(M_1 \otimes M_2)\|^2 \leq (1-\gamma_1)^2 \|y \otimes u_{N_2}\|^2$
- $\|x^{\perp}(M_1 \otimes M_2)\|^2 \leq (1-\gamma_2)^2 \|x^{\perp}\|^2$
- $(y \otimes u_{N_2})(M_1 \otimes M_2) \perp x^{\perp}(M_1 \otimes M_2)$

Gliederung

Überblick Graphenoperationen

- Quadrierung verbessert Expansion γ
- Tensorierung verbessert Knotenanzahl N

- Zick-Zack Produkt $G \text{ⓩ} H$ verbessert Grad D

Idee: Zufallsschritt in $G \text{ⓩ} H$ = Schritt in G, der zufällig von H gewählt wird.

Überblick Graphenoperationen

- Quadrierung verbessert Expansion γ
- Tensorierung verbessert Knotenanzahl N

- Zick-Zack Produkt $G ⓩ H$ verbessert Grad D

Idee: Zufallsschritt in $G ⓩ H$ = Schritt in G, der zufällig von H gewählt wird.

Überblick Graphenoperationen

- Quadrierung verbessert Expansion γ
- Tensorierung verbessert Knotenanzahl N

- Zick-Zack Produkt $G \circled{z} H$ verbessert Grad D

Idee: Zufallsschritt in $G \circled{z} H$ = Schritt in G, der zufällig von H gewählt wird.

Definition Zick-Zack Produkt

Definition

Es seien …

- G ein D_1-regulärer Graph mit N_1 Knoten,
- H ein D_2-regulärer Graph mit N_2 Knoten.

Das *Zick-Zack Produkt* $G \text{ⓩ} H$ ist ein Graph mit Knotenmenge $G \times H$.

Zu $a, b \in [D_2]$ berechnet sich der (a, b)-te Nachbar (v, j) eines Knotens (u, i) wie folgt:

1. Wähle den a-ten Nachbarn i' von i in H.
2. Wähle den i'-ten Nachbarn v von u in G. Hierbei sei $j' \in D_2$ so, dass (u, v) die i'-te Kante ist, die u verlässt und gleichzeitig die j'-te Kante, die in v hineingeht.
3. Wähle den b-ten Nachbarn j von j' in H.

Definition Zick-Zack Produkt

Definition

Es seien ...

- G ein D_1-regulärer Graph mit N_1 Knoten,
- H ein D_2-regulärer Graph mit N_2 Knoten.

Das *Zick-Zack Produkt* $G ⓩ H$ ist ein Graph mit Knotenmenge $G \times H$.

Zu $a, b \in [D_2]$ berechnet sich der (a, b)-te Nachbar (v, j) eines Knotens (u, i) wie folgt:

1. Wähle den a-ten Nachbarn i' von i in H.
2. Wähle den i'-ten Nachbarn v von u in G. Hierbei sei $j' \in D_2$ so, dass (u, v) die i'-te Kante ist, die u verlässt und gleichzeitig die j'-te Kante, die in v hineingeht.
3. Wähle den b-ten Nachbarn j von j' in H.

Definition Zick-Zack Produkt

Definition

Es seien …

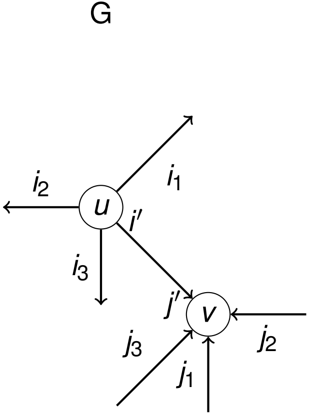
- G ein D_1-regulärer Graph mit N_1 Knoten,
- H ein D_2-regulärer Graph mit N_2 Knoten.

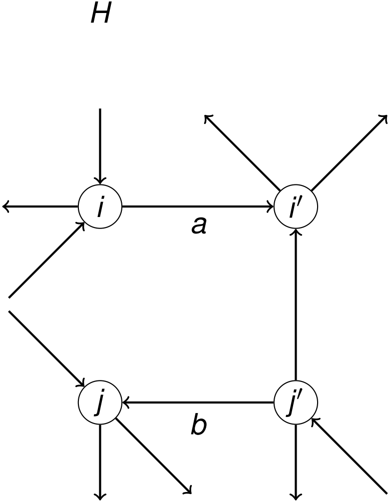
Das *Zick-Zack Produkt* $G ⓩ H$ ist ein Graph mit Knotenmenge $G \times H$.

Zu $a, b \in [D_2]$ berechnet sich der (a, b)-te Nachbar (v, j) eines Knotens (u, i) wie folgt:

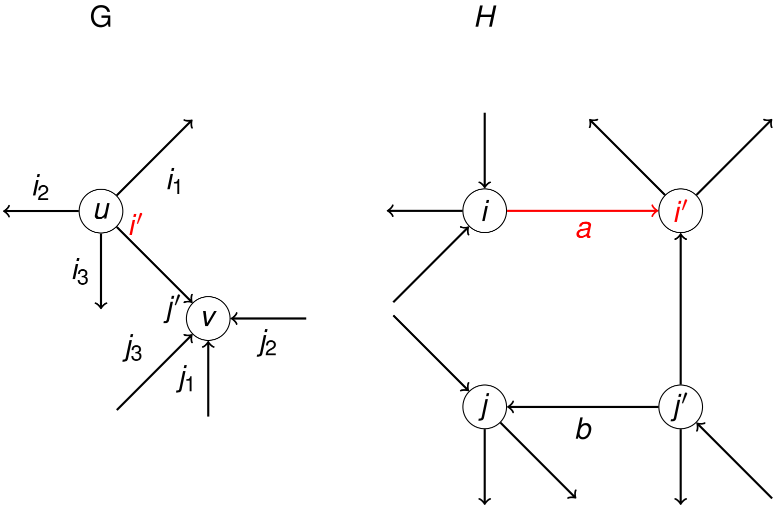
1. Wähle den a-ten Nachbarn i' von i in H.
2. Wähle den i'-ten Nachbarn v von u in G. Hierbei sei $j' \in D_2$ so, dass (u, v) die i'-te Kante ist, die u verlässt und gleichzeitig die j'-te Kante, die in v hineingeht.
3. Wähle den b-ten Nachbarn j von j' in H.

Definition Zick-Zack Produkt

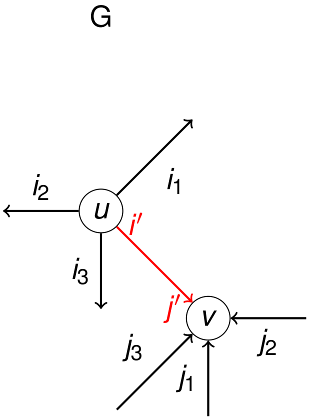


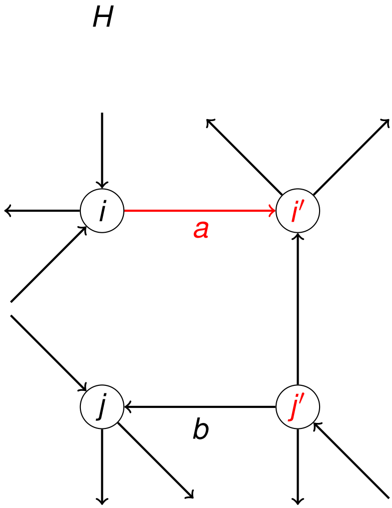


Definition Zick-Zack Produkt



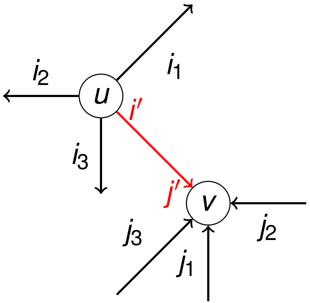
Definition Zick-Zack Produkt



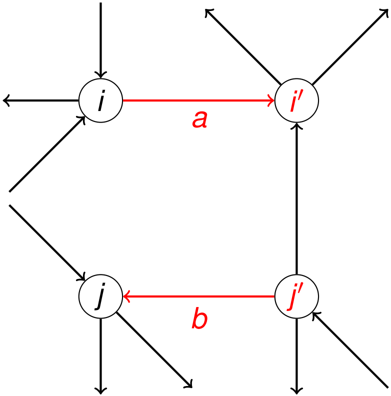


Definition Zick-Zack Produkt

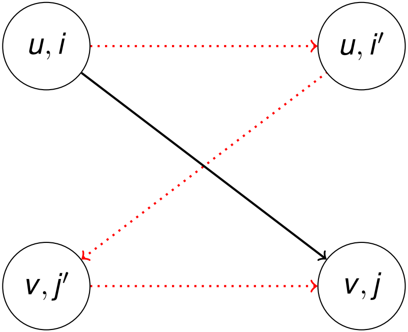
G



H



Definition: Zick-Zack Produkt



Parameter des Zick-Zack Produktes

- $G \textcircled{z} H$ hat $N_1 D_1$ Knoten.
- $G \textcircled{z} H$ ist D_2^2 regulär.

Der Grad von $G \textcircled{z} H$ wird kleiner, wenn $D_2^2 < D_1$ ist.

Und die Spektralexpansion?

Parameter des Zick-Zack Produktes

- $G \circled{z} H$ hat $N_1 D_1$ Knoten.
- $G \circled{z} H$ ist D_2^2 regulär.

Der Grad von $G \circled{z} H$ wird kleiner, wenn $D_2^2 < D_1$ ist.

Und die Spektralexpansion?

Parameter des Zick-Zack Produktes

Theorem

Ist G ein (N_1, D_1, γ_1)-Graph und H ein (D_1, D_2, γ_2)-Graph, dann ist das Zick-Zack Produkt $G \text{ⓩ} H$ ein $(N_1 D_1, D_2^2, \gamma_1 \gamma_2^2)$-Graph.

Im Besonderen gilt $\lambda(G \text{ⓩ} H) \leq \lambda(G) + 2\lambda(H)$

Beweis: Spektralexpansion des Zick-Zack Produktes

A,B,M Irrfahrtsmatrizen für G, H und $G \textcircled{z} H$
Zerlege M in Einzelschrittmatrizen

- $\widetilde{B} := I_{N_1} \otimes B$ (Schritt auf H)
- $\widehat{A}$ Permutationsmatrix zum Schritt $(u, i') \mapsto (v, j')$, d.h.

$$\widehat{A}((u,i'),(v,j')) = \begin{cases} 1 & (u,v) \text{ ist die } i'\text{-te Kante, die aus } u \\ & \text{hinausgeht und die } j'\text{-te Kante, die} \\ & \text{in } v \text{ hineingeht} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist $M = \widetilde{B}\widehat{A}\widetilde{B}$.

Beweis: Spektralexpansion des Zick-Zack Produktes

- Matrix-Dekomposition

$$B = \gamma_2 J + \overbrace{(1-\gamma_2)E}^{\text{Fehlerterm}},$$

wobei $J = (1/D_1)_{i,j}$ und $\|E\| \leq 1$.

- Das gibt

$$\widetilde{B} = \gamma_2 \widetilde{J} + (1-\gamma_2)\widetilde{E},$$

wobei $\widetilde{J} = I_{N_1} \otimes J$, $\widetilde{E} = I_{N_1} \otimes E$ und

$$\|\widetilde{E}\| = \|E\| \|I_{N_1}\| \leq 1$$

Beweis: Spektralexpansion des Zick-Zack Produktes

Einsetzen in $M = \widetilde{B}\widehat{A}\widetilde{B}$:

$$
\begin{aligned}
M &= (\gamma_2\widetilde{J} + (1-\gamma_2)\widetilde{E})\widehat{A}(\gamma_2\widetilde{J} + (1-\gamma_2)\widetilde{E}) \\
&= \gamma_2^2\widetilde{J}\widehat{A}\widetilde{J} + (1-\gamma_2^2)\underbrace{\left(\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}\widetilde{E}\widehat{A}\widetilde{J} + \frac{1-\gamma_2}{1+\gamma_2}\widetilde{E}\widehat{A}\widetilde{E} + \frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}\widetilde{J}\widehat{A}\tilde{E}\right)}_{=:F}
\end{aligned}
$$

Abschätzen:

$$
\|F\| \leq \frac{1}{1+\gamma_2}\left(2\gamma_2\|\widetilde{E}\|\|\widehat{A}\|\|\widetilde{J}\| + (1-\gamma_2)\|\widetilde{E}\|\|\widehat{A}\|\|\widetilde{E}\|\right) \leq \frac{1+\gamma_2}{1+\gamma_2}
$$

Beweis: Spektralexpansion des Zick-Zack Produktes

Einsetzen in $M = \widetilde{B}\widehat{A}\widetilde{B}$:

$$
\begin{aligned}
M &= (\gamma_2\widetilde{J} + (1-\gamma_2)\widetilde{E})\widehat{A}(\gamma_2\widetilde{J} + (1-\gamma_2)\widetilde{E}) \\
&= \gamma_2^2\widetilde{J}\widehat{A}\widetilde{J} + (1-\gamma_2^2)\underbrace{\left(\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}\widetilde{E}\widehat{A}\widetilde{J} + \frac{1-\gamma_2}{1+\gamma_2}\widetilde{E}\widehat{A}\widetilde{E} + \frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}\widetilde{J}\widehat{A}\tilde{E}\right)}_{=:F}
\end{aligned}
$$

Abschätzen:

$$
\|F\| \le \frac{1}{1+\gamma_2}\left(2\gamma_2\|\widetilde{E}\|\|\widehat{A}\|\|\widetilde{J}\| + (1-\gamma_2)\|\widetilde{E}\|\|\widehat{A}\|\|\widetilde{E}\|\right) \le \frac{1+\gamma_2}{1+\gamma_2}
$$

Beweis: Spektralexpansion des Zick-Zack Produktes

- Beobachtung:

$$\widetilde{J}\widehat{A}\widetilde{J} = A \otimes J$$

- Damit:

$$M = \gamma_2^2 A \otimes J + (1 - \gamma_2^2) F$$

- Finale Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\lambda(M) &\leq \gamma_2^2 \lambda(A \otimes J) + (1 - \gamma_2^2) \\
&= \gamma_2^2 (1 - \gamma_1) + (1 - \gamma_2^2) \\
&= 1 - \gamma_1 \gamma_2^2
\end{aligned}$$

Zwischenstand

Graphenoperationen:

- Quadrieren $\to$ verbessert Expansion γ
- Tensorieren $\to$ verbessert Knotenanzahl N
- Zick-Zack Produkt $\to$ verbessert Grad D

Setze alles zusammen

Gliederung

Definition milde und voll explizit

milde explizit

Vollständige Darstellung des Graphen in $\mathrm{poly}(N)$

voll explizit

Berechne den i-ten Nachbarn eines Knotens in $\mathrm{poly}(\log N)$

Milde explizite Konstruktion eines Expandergraphen

Milde explizite Konstruktion

Sei H ein $(D^4, D, 7/8)$-Graph.

$$\text{Setze} \quad G_1 = H^2$$
$$G_{t+1} = G_t^2 \textcircled{z} H$$

Für alle t ist G_t ein $(D^{4t}, D^2, 1/2)$-Graph und diese Konstruktion ist milde explizit.

Beweis: Milde expliziter Expandergraph

$H = (D^4, D, 7/8), \quad G_{t+1} = G_t^2 ⓩ H, \quad$ Beh.: $G_t = (D^{4t}, D^2, 1/2)$

- $t = 1$ ist Quadrierung, d.h.

$$H^2 \text{ ist ein } (N_H, D_H^2, 1 - (1 - \gamma_H)^2) \text{ Graph}$$

- Einsetzen

$$\gamma(G_1) = 2 \cdot 7/8 - 49/64 \geq 1/2 \; \surd$$

Beweis: Milde expliziter Expandergraph

$H = (D^4, D, 7/8), \quad G_{t+1} = G_t^2 ⓩ H, \quad$ Beh.: $G_t = (D^{4t}, D^2, 1/2)$

- Anzahl Knoten:
$$N_{t+1} = N_t N_H = D^{4(t+1)}$$
- Grad:
$$\deg(G_{t+1}) = \deg(H)^2 = D^2$$
- Spektralexpansion:
$$\lambda(G_{t+1}) \leq \lambda(G_t^2) + 2\lambda(H) \leq 1/4 + 2/8 = 1/2$$

Beweis: Milde expliziter Expandergraph

$H = (D^4, D, 7/8), \quad G_{t+1} = G_t^2 ⓩ H, \quad$ Beh.: $G_t = (D^{4t}, D^2, 1/2)$

- Wesentlicher Schritt: Auswertung der Kantenpermutation $(u, i') \mapsto (v, j')$.

$$\begin{aligned} \text{time}(G_t) &= 2\,\text{time}(G_{t-1}) + \text{poly}(\log(N_t)) \\ &= 2^t\,\text{poly}(\log(N_t)) \\ &= N_t^{\Theta(1)} \end{aligned}$$

- Lösung: Mehr Knoten.

Beweis: Milde expliziter Expandergraph

$H = (D^4, D, 7/8), \quad G_{t+1} = G_t^2 ⓩ H, \quad$ Beh.: $G_t = (D^{4t}, D^2, 1/2)$

- Wesentlicher Schritt: Auswertung der Kantenpermutation $(u, i') \mapsto (v, j')$.

$$\begin{aligned} \text{time}(G_t) &= 2\,\text{time}(G_{t-1}) + \text{poly}(\log(N_t)) \\ &= 2^t\,\text{poly}(\log(N_t)) \\ &= N_t^{\Theta(1)} \end{aligned}$$

- Lösung: Mehr Knoten.

Voll explizite Konstruktion eines Expandergraphen

Konstruktion

Sei H ein $(D^8, D, 7/8)$-Graph.

$$\text{Setze} \quad G_1 = H^2$$
$$G_{t+1} = (G_t \otimes G_t)^2 ⓩ H$$

Für jedes $t \in \mathbb{N}$ ist G_t ein $(D^{8(2^t-1)}, D^2, 1/2)$ Graph und die Konstruktion ist voll explizit.

Beweisskizze: Voll expliziter Expandergraph

- Neue Knotenanzahl

$$
\begin{aligned}
N_t = N_{t-1}^2 N_H = \left(N_{t-2}^2 N_H\right)^2 N_H = \cdots = N_1^{2^{t-1}} \prod_{i=0}^{t-2} N_H^{2^i} \\
= N_1^{2^{t-1}} N_H^{2^{t-1}-1} = D^{8(2^t-1)}
\end{aligned}
$$

- Entsprechend

$$
\begin{aligned}
\text{time}(G_t) &= 4^t \text{poly}(\log N_t) \\
&= \text{poly}(\log N_t)
\end{aligned}
$$

Beweisskizze: Voll expliziter Expandergraph

- Neue Knotenanzahl

$$N_t = N_{t-1}^2 N_H = \left(N_{t-2}^2 N_H\right)^2 N_H = \cdots = N_1^{2^{t-1}} \prod_{i=0}^{t-2} N_H^{2^i}$$
$$= N_1^{2^{t-1}} N_H^{2^{t-1}-1} = D^{8(2^t-1)}$$

- Entsprechend

$$\begin{aligned}\text{time}(G_t) &= 4^t \text{poly}(\log N_t) \\ &= \text{poly}(\log N_t)\end{aligned}$$

Voll explizite Konstruktion mit dichteren Knoten

Konstruktion

Sei H ein $(D^8, D, 7/8)$-Graph.

$$\text{Setze} \quad \begin{aligned} G_1 &= H^2 \\ G_t &= (G_{\lceil t/2 \rceil} \otimes G_{\lfloor t/2 \rfloor})^2 \textcircled{z} H \end{aligned}$$

Für jedes t ist G_t ein $(D^{8(2t-1)}, D^2, 1/2)$ Graph und die Konstruktion ist voll explizit.

Voll explizit

- Anzahl der Knoten: $D^{8(2t-1)}$
- Zeit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{time}(G_t) &= 2(\mathrm{time}(G_{\lceil t/2 \rceil}) + \mathrm{time}(G_{\lfloor t/2 \rfloor})) \\
&= \mathcal{O}(4^{\log(t+1)}) \\
&= \mathrm{poly}(t)
\end{aligned}$$

Ernte

Theorem

Zu jeder Konstanten $D \in \mathbb{N}$ gibt es eine Familie von Expandergraphen $(G_t)_{t\in\mathbb{N}}$, so dass jedes G_t ein voll expliziter Expander vom Grad D^2 mit Spektralexpansion $1/2$ und $N_t = D^{8(2t-1)}$ Knoten ist.