The weak 3-flow conjecture and the weak circular flow conjecture (C. Thomassen)

Kathlén Kohn

Sei G ein Multigraph ohne Schleifen.

1 Motivation

Definition 1.1.

- Eine Orientierung D von G heißt *Tutte-Orientierung*, falls

$$\forall x \in V(G) : d_D^-(x) \equiv d_D^+(x) \mod 3.$$

- *G erlaubt alle verallgemeinerten Tutte-Orientierungen*, falls es für alle $p : V(G) \to \mathbb{Z}$ mit $\sum\limits_{x \in V(G)} p(x) \equiv |E(G)| \mod 3$ eine Orientierung D gibt, so dass

$$\forall x \in V(G) : d_D^+(x) \equiv p(x) \mod 3.$$

Vermutung 1.3 (3-Flow Conjecture, Tutte)**.** Jeder 4-kantenzusammenhängende Graph hat eine Tutte-Orientierung.

Theorem 1.4. Jeder 8-kantenzusammenhängende Graph erlaubt alle verallgemeinerten Tutte-Orientierungen.

Vermutung 1.5 (Circular Flow Conjecture, Jaeger)**.** Sei $k \in \mathbb{N}$ ungerade. Jeder $(2k-2)$-kantenzusammenhängende Graph hat eine Orientierung D, so dass

$$\forall x \in V(G) : d_D^-(x) \equiv d_D^+(x) \mod k.$$

Theorem 1.6. Sei $k \in \mathbb{N}$. Jeder $(2k^2+k)$-kantenzusammenhängende Graph hat für alle $p : V(G) \to \mathbb{Z}$ mit $\sum\limits_{x \in V(G)} p(x) \equiv |E(G)| \mod k$ eine Orientierung D, so dass

$$\forall x \in V(G) : d_D^+(x) \equiv p(x) \mod k.$$

Vermutung 1.7 (Tree-Decomposition Conjecture, Bárat/Thomassen)**.** Für jeden Baum T gibt es ein $k_T \in \mathbb{N}$, so dass jeder k_T-kantenzusammenhängende einfache Graph G mit $|E(T)| \mid |E(G)|$ eine T-Zerlegung besitzt (d.h. eine disjunkte Zerlegung von $E(G)$ in zu T isomorphe Teilgraphen).

Theorem 1.8.

- $T = K_{1,3} \Rightarrow k_T = 8$
- $T = K_{1,k}$ mit $k \geq 4 \Rightarrow k_T = 2k^2 + k$

2 Hauptergebnis

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ und $p : V(G) \to \mathbb{Z}$.

Definition 2.1. Sei $A \subseteq V(G)$ mit $d(A) := |\{\{x,y\} \in E(G) \mid x \in A, y \notin A\}| \geq k$.

- $p(A) := \sum\limits_{x \in A} p(x) - |E(G[A])|$.
- $t(A) := \min\{m \in \mathbb{N}_0 \mid \exists l \in \mathbb{N}_0 : m + 2l = d(A), p(A) \in \{l, m+l\} \mod k\} \in \{0, \ldots, k\}$.
- A ist *positiv* bzw. *negativ*, falls $p(A) \equiv t(A) + \frac{d(A)-t(A)}{2} \mod k$ bzw. $p(A) \equiv \frac{d(A)-t(A)}{2} \mod k$.

Sei $z_0 \in V(G)$, so dass $e \in E(G)$ gerichtet ist gdw. $z_0 \in e$ ist, und ferner $d^+(z_0) \equiv p(z_0) \mod k$ gilt.

Theorem 2.3. Es sei $k = 3$ und

1. $|V(G)| \geq 3$,
2. $1 \leq d(z_0) \leq 11$,
3. für alle $A \subseteq V(G)$ mit $A \neq \emptyset$, $z_0 \notin A$ und $|V(G) \setminus A| \geq 2$ gelte $d(A) \geq 6 + t(A)$,
4. $\sum\limits_{x \in V(G)} p(x) \equiv |E(G)| \mod 3$.

Dann existiert eine Orientierung D, die bereits gerichtete Kanten behält, mit

$$\forall x \in V(G) : d_D^+(x) \equiv p(x) \mod 3,$$

es sei denn es ist $V(G - z_0) = A \dot{\cup} B$ mit einer Brücke zwischen A und B sowie $p(A) \equiv |\{(x, z_0) \in E(G) \mid x \in A\}| + 2 \mod 3$ (Bezeichnung: problematische Brücke).

Theorem 2.4. Es sei $k \geq 4$ und

1. $|V(G)| \geq 3$,
2. $1 \leq d(z_0) \leq 3k^2 + 6k - 13$,
3. für alle $A \subseteq V(G)$ mit $A \neq \emptyset$, $z_0 \notin A$ und $|V(G) \setminus A| \geq 2$ gelte $d(A) \geq 2k^2 + t(A)$,
4. $\sum\limits_{x \in V(G)} p(x) \equiv |E(G)| \mod k$.

Dann existiert eine Orientierung D, die bereits gerichtete Kanten behält, mit

$$\forall x \in V(G) : d_D^+(x) \equiv p(x) \mod k.$$