I - XIV

3D-Rekonstruktion aus Bildern und Algebraische Geometrie

Kathlén Kohn
KTH

June 14, 2023

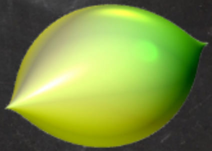
Algebraic varieties

Definition

A **variety** is the common zero set of a system of polynomial equations.

A variety looks like a manifold **almost everywhere**:





Definition

A variety is **irreducible** if it is not the union of two proper subvarieties.
The **dimension** of an irreducible variety is its local dimension as a manifold.

Structure from Motion

Reconstruct 3D scenes and camera poses from 2D images

Rome in a Day: S. Agarwal, Y. Furukawa, N. Snavely, I. Simon, S. Seitz, R. Szeliski

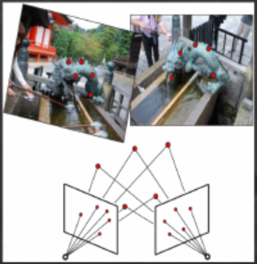
How to reconstruct?

Input:
2D images

Image
matching

Identify common
points, lines &
curves on images

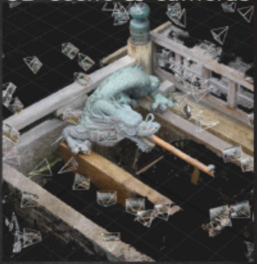
Algebraic
reconstruction



Reconstruct
3D points & lines
and camera poses

$\Updownarrow$

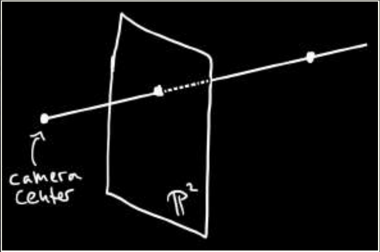
Output:
3D scene & cameras



(by Tomas Pajdla)

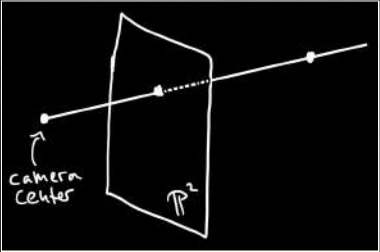
algebraic inverse problem:
solve system of polynomial equations

Was ist eine Kamera?



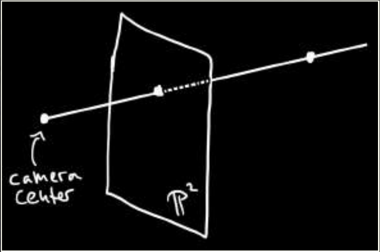
Eine Kamera ist eine surjektive Projektion $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$,

Was ist eine Kamera?



Eine Kamera ist eine surjektive Projektion $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, gegeben durch eine 3×4 matrix A vom Rang 3.

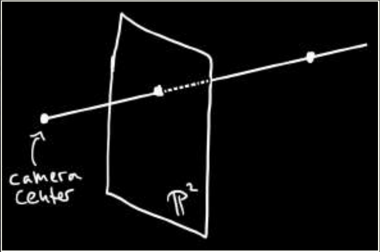
Was ist eine Kamera?



Eine Kamera ist eine surjektive Projektion $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, gegeben durch eine 3×4 matrix A vom Rang 3.

Sie macht ein Bild von einem Punkt x via $x \mapsto Ax$.

Was ist eine Kamera?

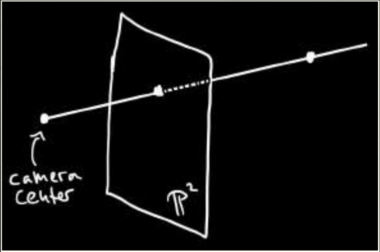


Eine Kamera ist eine surjektive Projektion $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, gegeben durch eine 3×4 matrix A vom Rang 3.

Sie macht ein Bild von einem Punkt x via $x \mapsto Ax$.

Weil $A \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) \cong \mathbb{P}^{11}$,

Was ist eine Kamera?



Eine Kamera ist eine surjektive Projektion $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, gegeben durch eine 3×4 matrix A vom Rang 3.

Sie macht ein Bild von einem Punkt x via $x \mapsto Ax$.

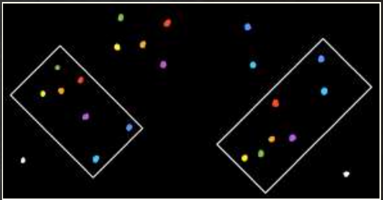
Weil $A \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) \cong \mathbb{P}^{11}$, erhalten wir eine rationale Abbildung

$$\mathbb{P}^{11} \times \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2,$$

$$(A, x) \mapsto Ax.$$

3D-Rekonstruktion benötigt mehrere Kameras

3D-Rekonstruktion benötigt mehrere Kameras

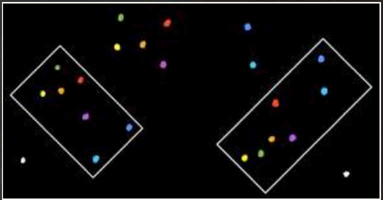


2 Kameras fotografieren 7 Punkte:

$$(\mathbb{P}^{11})^2 \times (\mathbb{P}^3)^7 \dashrightarrow (\mathbb{P}^2)^7 \times (\mathbb{P}^2)^7,$$

$$(A_1, A_2, x_1, x_2, \ldots, x_7) \mapsto (A_1x_1, A_1x_2, \ldots, A_1x_7,\ \ldots,\ A_2x_1, A_2x_2, \ldots, A_2x_7).$$

3D-Rekonstruktion benötigt mehrere Kameras



2 Kameras fotografieren 7 Punkte:

$$(\mathbb{P}^{11})^2 \times (\mathbb{P}^3)^7 \dashrightarrow (\mathbb{P}^2)^7 \times (\mathbb{P}^2)^7,$$

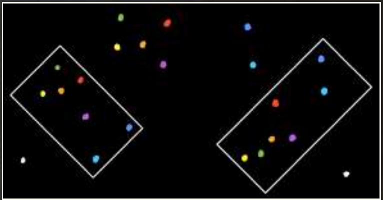
$$(A_1, A_2, x_1, x_2, \ldots, x_7) \mapsto (A_1x_1, A_1x_2, \ldots, A_1x_7, \ \ldots, \ A_2x_1, A_2x_2, \ldots, A_2x_7).$$

3D-Rekonstruktion:

- Gegeben: Bildpunkte $y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{1,7}, \ \ldots, \ y_{2,1}, y_{2,2}, \ldots, y_{2,7} \in \mathbb{P}^2$
- Gesucht: Kameras $A_1, A_2 \in \mathbb{P}^{11}$ und 3D-Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_7 \in \mathbb{P}^3$, so dass

$$A_i x_j = y_{i,j} \quad \text{für alle } i = 1, 2 \text{ und } j = 1, 2, \ldots, 7.$$

3D-Rekonstruktion benötigt mehrere Kameras



2 Kameras fotografieren 7 Punkte:

$$(\mathbb{P}^{11})^2 \times (\mathbb{P}^3)^7 \dashrightarrow (\mathbb{P}^2)^7 \times (\mathbb{P}^2)^7,$$
$$(A_1, A_2, x_1, x_2, \ldots, x_7) \mapsto (A_1x_1, A_1x_2, \ldots, A_1x_7,\ \ldots,\ A_2x_1, A_2x_2, \ldots, A_2x_7).$$

3D-Rekonstruktion:

- Gegeben: Bildpunkte $y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{1,7},\ \ldots,\ y_{2,1}, y_{2,2}, \ldots, y_{2,7} \in \mathbb{P}^2$
- Gesucht: Kameras $A_1, A_2 \in \mathbb{P}^{11}$ und 3D-Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_7 \in \mathbb{P}^3$, so dass

$$A_i x_j = y_{i,j} \quad \text{für alle } i = 1, 2 \text{ und } j = 1, 2, \ldots, 7.$$

Dann nennen wir $(A_1, A_2, x_1, x_2, \ldots, x_7)$ eine Lösung für die Bildpunkte $y_{i,j}$.

3D-Rekonstruktion ist nur möglich bis auf 3D-Koordinatenwechsel

3D-Rekonstruktion ist nur möglich bis auf 3D-Koordinatenwechsel

Die projektive allgemeine lineare Gruppe

$$\mathrm{PGL}(4) = \{g \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{4\times 4}) \mid \det(g) \neq 0\}$$

wirkt auf Kameras und 3D-Punkten, ohne die Bilder zu verändern:

3D-Rekonstruktion ist nur möglich bis auf 3D-Koordinatenwechsel

Die projektive allgemeine lineare Gruppe

$$\mathrm{PGL}(4) = \{g \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{4\times 4}) \mid \det(g) \neq 0\}$$

wirkt auf Kameras und 3D-Punkten, ohne die Bilder zu verändern:

$$g.(A_1, A_2, x_1, x_2, \ldots, x_7) := (A_1 g^{-1}, A_2 g^{-1}, g x_1, g x_2, \ldots, g x_7)$$

3D-Rekonstruktion ist nur möglich bis auf 3D-Koordinatenwechsel

Die projektive allgemeine lineare Gruppe

$$\mathrm{PGL}(4) = \{g \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{4\times 4}) \mid \det(g) \neq 0\}$$

wirkt auf Kameras und 3D-Punkten, ohne die Bilder zu verändern:

$$g.(A_1, A_2, x_1, x_2, \ldots, x_7) := (A_1 g^{-1}, A_2 g^{-1}, gx_1, gx_2, \ldots, gx_7)$$

$$\Rightarrow y_{i,j} = A_i x_j = A_i g^{-1} \cdot gx_j$$

3D-Rekonstruktion ist nur möglich bis auf 3D-Koordinatenwechsel

Die projektive allgemeine lineare Gruppe

$$\mathrm{PGL}(4) = \{g \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{4\times 4}) \mid \det(g) \neq 0\}$$

wirkt auf Kameras und 3D-Punkten, ohne die Bilder zu verändern:

$$g.(A_1, A_2, x_1, x_2, \ldots, x_7) := (A_1 g^{-1}, A_2 g^{-1}, g x_1, g x_2, \ldots, g x_7)$$

$$\Rightarrow y_{i,j} = A_i x_j = A_i g^{-1} \cdot g x_j$$

Wenn die Bildpunkte $y_{i,j}$ eine Lösung haben, dann gibt es unendlich viele Lösungen!

Theorem:
Über $\mathbb{C}$ haben fast alle Bildpunkte $y_{i,j}$ genau 3 Lösungen modulo $\mathrm{PGL}(4)$.

Theorem:
Über $\mathbb{C}$ haben fast alle Bildpunkte $y_{i,j}$ genau 3 Lösungen modulo $\mathrm{PGL}(4)$.

Idee: Löse in 2 Schritten:

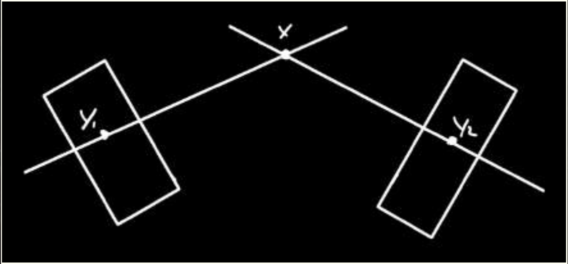
1) Rekonstruiere erst nur die Kameras A_1, A_2 (modulo $\mathrm{PGL}(4)$).

Theorem:
Über $\mathbb{C}$ haben fast alle Bildpunkte $y_{i,j}$ genau 3 Lösungen modulo $\mathrm{PGL}(4)$.

Idee: Löse in 2 Schritten:

1) Rekonstruiere erst nur die Kameras A_1, A_2 (modulo $\mathrm{PGL}(4)$).
2) x_j ist die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A_1 x_j = y_{1,j}$$
$$A_2 x_j = y_{2,j}$$



Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Betrachte feste, aber beliebige Kameras A_1, A_2 mit verschiedenen Kernen (= Kamerazentren).

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Betrachte feste, aber beliebige Kameras A_1, A_2 mit verschiedenen Kernen (= Kamerazentren).

Das Bild der Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi_{A_1,A_2} : \mathbb{P}^3 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2,\\ x &\mapsto (A_1x, A_2x)\end{aligned}$$

bleibt unverändert unter der $\mathrm{PGL}(4)$-Wirkung

$$g.(A_1, A_2) := (A_1g^{-1}, A_2g^{-1}).$$

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Betrachte feste, aber beliebige Kameras A_1, A_2 mit verschiedenen Kernen (= Kamerazentren).

Das Bild der Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_{A_1,A_2} : \mathbb{P}^3 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2, \\ x &\mapsto (A_1 x, A_2 x) \end{aligned}$$

bleibt unverändert unter der $\mathrm{PGL}(4)$-Wirkung

$$g.(A_1, A_2) := (A_1 g^{-1}, A_2 g^{-1}).$$

Weil $\dim \operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2} = 3$,

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Betrachte feste, aber beliebige Kameras A_1, A_2 mit verschiedenen Kernen (= Kamerazentren).

Das Bild der Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi_{A_1,A_2} : \mathbb{P}^3 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2,\\ x &\mapsto (A_1 x, A_2 x)\end{aligned}$$

bleibt unverändert unter der $\mathrm{PGL}(4)$-Wirkung

$$g.(A_1, A_2) := (A_1 g^{-1}, A_2 g^{-1}).$$

Weil $\dim \operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2} = 3$, gibt es genau ein Polynom (bis auf Skalierung), das auf dem Bild verschwindet.

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

$$\begin{aligned}\Phi_{A_1,A_2} : \mathbb{P}^3 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2,\\ x &\mapsto (A_1 x, A_2 x)\end{aligned}$$

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

$$\Phi_{A_1,A_2} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2, \quad x \mapsto (A_1 x, A_2 x)$$

$(y_1, y_2) \in \operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2}$
$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{P}^3 : A_1 x = y_1, A_2 x = y_2$

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

$$\Phi_{A_1,A_2} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2,$$
$$x \mapsto (A_1 x, A_2 x)$$

$(y_1, y_2) \in \operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2}$
$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{P}^3 : A_1 x = y_1, A_2 x = y_2$
$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : A_1 x = \lambda_1 y_1, A_2 x = \lambda_2 y_2$

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

$$\begin{aligned}\Phi_{A_1,A_2} : \mathbb{P}^3 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2,\\ x &\mapsto (A_1x, A_2x)\end{aligned}$$

$(y_1, y_2) \in \operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2}$
$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{P}^3 : A_1x = y_1, A_2x = y_2$
$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : A_1x = \lambda_1 y_1, A_2x = \lambda_2 y_2$
$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \begin{bmatrix} A_1 & y_1 & 0 \\ A_2 & 0 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} = 0$

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

$$\Phi_{A_1,A_2} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2,$$
$$x \mapsto (A_1 x, A_2 x)$$

$(y_1, y_2) \in \operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2}$
$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{P}^3 : A_1 x = y_1, A_2 x = y_2$
$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : A_1 x = \lambda_1 y_1, A_2 x = \lambda_2 y_2$
$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \begin{bmatrix} A_1 & y_1 & 0 \\ A_2 & 0 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} = 0$
$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} A_1 & y_1 & 0 \\ A_2 & 0 & y_2 \end{bmatrix} = 0$

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

$$\Phi_{A_1,A_2} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2,$$
$$x \mapsto (A_1 x, A_2 x)$$

$$\begin{aligned}
&(y_1, y_2) \in \operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2} \\
&\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{P}^3 : A_1 x = y_1, A_2 x = y_2 \\
&\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : A_1 x = \lambda_1 y_1, A_2 x = \lambda_2 y_2 \\
&\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \begin{bmatrix} A_1 & y_1 & 0 \\ A_2 & 0 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow \det \begin{bmatrix} A_1 & y_1 & 0 \\ A_2 & 0 & y_2 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

- Dies ist das eindeutige Polynom, dass auf $\operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2}$ verschwindet!

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

$$\Phi_{A_1,A_2} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2,$$
$$x \mapsto (A_1 x, A_2 x)$$

$(y_1, y_2) \in \operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2}$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{P}^3 : A_1 x = y_1, A_2 x = y_2$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : A_1 x = \lambda_1 y_1, A_2 x = \lambda_2 y_2$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \begin{bmatrix} A_1 & y_1 & 0 \\ A_2 & 0 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} A_1 & y_1 & 0 \\ A_2 & 0 & y_2 \end{bmatrix} = 0$

- Dies ist das eindeutige Polynom, dass auf $\operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2}$ verschwindet!
- Es ist bilinear in y_1 und y_2.

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

$$\Phi_{A_1,A_2} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2,$$
$$x \mapsto (A_1 x, A_2 x)$$

$$\begin{aligned}
&(y_1, y_2) \in \operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2} \\
&\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{P}^3 : A_1 x = y_1, A_2 x = y_2 \\
&\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : A_1 x = \lambda_1 y_1, A_2 x = \lambda_2 y_2 \\
&\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \begin{bmatrix} A_1 & y_1 & 0 \\ A_2 & 0 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow \det \begin{bmatrix} A_1 & y_1 & 0 \\ A_2 & 0 & y_2 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

- Dies ist das eindeutige Polynom, dass auf $\operatorname{im} \Phi_{A_1,A_2}$ verschwindet!
- Es ist bilinear in y_1 und y_2.
- Daher ist es von der Form $y_2^\top \cdot F_{A_1,A_2} \cdot y_1$, wobei $F_{A_1,A_2} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 3})$.

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) &\dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 3}), \\ (A_1, A_2) &\longmapsto F_{A_1,A_2} \end{aligned}$$

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) &\dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 3}),\\ (A_1, A_2) &\longmapsto F_{A_1,A_2}\end{aligned}$$

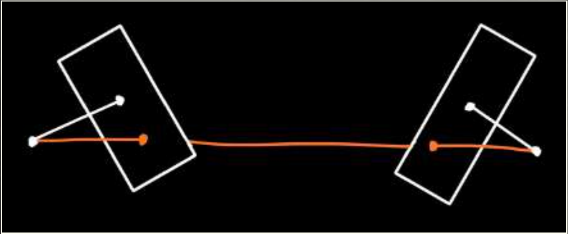
ist invariant unter der $\mathrm{PGL}(4)$-Wirkung $g.(A_1, A_2) := (A_1 g^{-1}, A_2 g^{-1})$.

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Die Abbildung

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 3}),$$
$$(A_1, A_2) \longmapsto F_{A_1,A_2}$$

ist invariant unter der $\mathrm{PGL}(4)$-Wirkung $g.(A_1, A_2) := (A_1 g^{-1}, A_2 g^{-1})$.



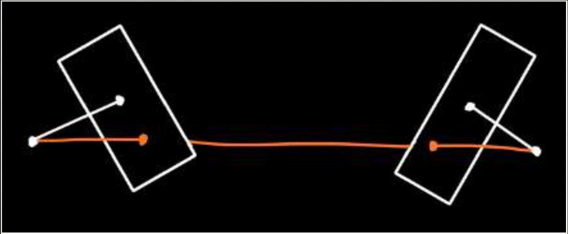
- $A_1(\ker A_2) = \ker F_{A_1,A_2}$

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) &\dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 3}), \\ (A_1, A_2) &\longmapsto F_{A_1,A_2} \end{aligned}$$

ist invariant unter der $\mathrm{PGL}(4)$-Wirkung $g.(A_1, A_2) := (A_1 g^{-1}, A_2 g^{-1})$.



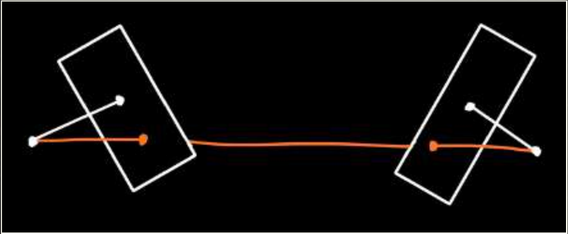
- $A_1(\ker A_2) = \ker F_{A_1,A_2}$
- $A_2(\ker A_1) = \mathrm{coker}\, F_{A_1,A_2}$

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Die Abbildung

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 3}),$$
$$(A_1, A_2) \longmapsto F_{A_1,A_2}$$

ist invariant unter der $\mathrm{PGL}(4)$-Wirkung $g.(A_1, A_2) := (A_1 g^{-1}, A_2 g^{-1})$.



- $A_1(\ker A_2) = \ker F_{A_1,A_2}$
- $A_2(\ker A_1) = \operatorname{coker} F_{A_1,A_2}$
- $\operatorname{rank} F_{A_1,A_2} = 2$

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Proposition: Die Abbildung

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4})\right) / \mathrm{PGL}(4) &\dashrightarrow \{F \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 3}) \mid \det F = 0\} \\ (A_1, A_2) &\longmapsto F_{A_1,A_2}\end{aligned}$$

ist birational.

Kameras modulo $\mathrm{PGL}(4)$

Proposition: Die Abbildung

$$\left(\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 4})\right) / \mathrm{PGL}(4) \dashrightarrow \{F \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{3\times 3}) \mid \det F = 0\}$$
$$(A_1, A_2) \longmapsto F_{A_1,A_2}$$

ist birational.

In anderen Worten: Eine generische 3×3-Matrix F vom Rang 2 beschreibt genau ein Kamerapaar (A_1, A_2) modulo $\mathrm{PGL}(4)$.

3D-Rekonstruktion

3D-Rekonstruktion

Da die Varietät $\mathcal{F} := \{F \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times3}) \mid \det F = 0\}$ Dimension **7** und Grad **3** hat,

3D-Rekonstruktion

Da die Varietät $\mathcal{F} := \{F \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 3}) \mid \det F = 0\}$ Dimension **7** und Grad **3** hat, gibt es für generische Bildpunkte
$y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{1,7}, \ \ldots, \ y_{2,1}, y_{2,2}, \ldots, y_{2,7} \in \mathbb{P}^2$ genau **3** Matrizen $F \in \mathcal{F}$, so dass

$$y_{2,j}^\top \cdot F \cdot y_{1,j} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, 2, \ldots, 7.$$

3D-Rekonstruktion

Da die Varietät $\mathcal{F} := \{F \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 3}) \mid \det F = 0\}$ Dimension **7** und Grad **3** hat, gibt es für generische Bildpunkte
$y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{1,7}, \ \ldots, \ y_{2,1}, y_{2,2}, \ldots, y_{2,7} \in \mathbb{P}^2$ genau **3** Matrizen $F \in \mathcal{F}$, so dass

$$y_{2,j}^\top \cdot F \cdot y_{1,j} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, 2, \ldots, 7.$$

Theorem:
Über $\mathbb{C}$ haben fast alle Bildpunkte $y_{i,j}$ genau 3 Lösungen modulo $\mathrm{PGL}(4)$.

3D-Rekonstruktion

Da die Varietät $\mathcal{F} := \{F \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{3\times 3}) \mid \det F = 0\}$ Dimension **7** und Grad **3** hat, gibt es für generische Bildpunkte $y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{1,7},\ \ldots,\ y_{2,1}, y_{2,2}, \ldots, y_{2,7} \in \mathbb{P}^2$ genau **3** Matrizen $F \in \mathcal{F}$, so dass

$$y_{2,j}^\top \cdot F \cdot y_{1,j} = 0 \quad \text{für alle } j = 1, 2, \ldots, 7.$$

Theorem:
Über $\mathbb{C}$ haben fast alle Bildpunkte $y_{i,j}$ genau 3 Lösungen modulo $\mathrm{PGL}(4)$.

Idee: Löse in 3 Schritten:

0) Rekonstruiere 3 Matrizen F wie oben.
1) Für jedes F, berechne die eindeutigen Kameras A_1, A_2 (modulo $\mathrm{PGL}(4)$).
2) x_j ist die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A_1 x_j = y_{1,j}$$
$$A_2 x_j = y_{2,j}$$

In der Praxis...

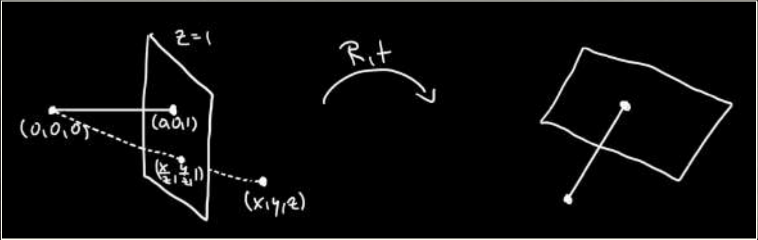
können nicht beliebige 3×4 Matrizen A Kameras modellieren, da gewisse interne Kameraparameter vorgegeben sind, z.B. die Brennweite.

In der Praxis...

können nicht beliebige 3×4 Matrizen A Kameras modellieren, da gewisse interne Kameraparameter vorgegeben sind, z.B. die Brennweite.

Das geläufigste Kameramodell sind Matrizen der Form

$$A = [R|t], \quad \text{wobei } R \in \mathrm{SO}(3), t \in \mathbb{R}^3.$$

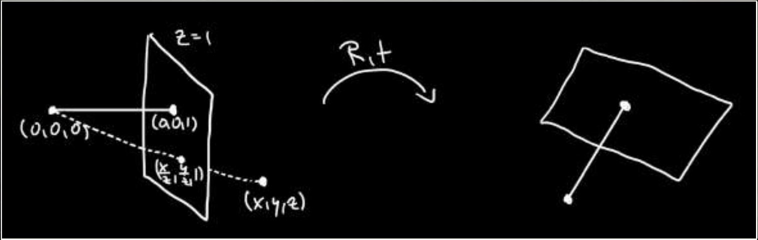


In der Praxis...

können nicht beliebige 3×4 Matrizen A Kameras modellieren, da gewisse interne Kameraparameter vorgegeben sind, z.B. die Brennweite.

Das geläufigste Kameramodell sind Matrizen der Form

$$A = [R|t], \quad \text{wobei } R \in \mathrm{SO}(3), t \in \mathbb{R}^3.$$



Jetzt wirkt nicht die ganze Gruppe $\mathrm{PGL}(4)$, sondern

$$G := \left\{ g = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \mid R \in \mathrm{SO}(3), t \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$