Symmetrische Gruppen

Kathlén Kohn - Matrikelnummer 6582356

5. Juni 2012

Sei im Folgenden $A := \mathbb{C}[S_n]$ die Gruppenalgebra von S_n über $\mathbb{C}$.

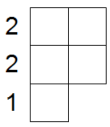
Def. 1: Eine Partition von $n \in \mathbb{N}$ ist ein Tupel $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{N}, \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1$ und $n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$.

Bsp. 1: Partitionen für $n = 3 : (3), (2,1), (1,1,1)$

Bem.: Partitionen können lexikografisch geordnet werden: Seien $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ und $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ Partitionen von $n \in \mathbb{N}$. $\lambda > \mu \Leftrightarrow \exists j \in \{1, \ldots, \min\{k,l\}\} : \lambda_j > \mu_j, \lambda_i = \mu_i \, \forall i \in \{1, \ldots, j-1\}$

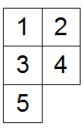
Def. 2: Das Young-Diagramm zu einer Partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ hat k linksbündige Zeilen mit λ_i Boxen in der i-ten Zeile.

Bsp. 2: Young-Diagramm zu $(2,2,1)$:

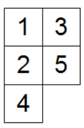


Def. 3: Ein Tableau T zu einem Young-Diagramm ist eine Nummerierung der Boxen mit den Zahlen $1, \ldots, n$. $T(i,j)$ bezeichne den Eintrag an Position (i,j).

Bsp. 3: Tableaus zu obigem Young-Diagramm:



(a) T_1



(b) T_2

Def. 4: Sei $g \in S_n$ und T ein Tableau. Definiere Tableau gT durch: $T(i,j) = \alpha \Leftrightarrow gT(i,j) = g(\alpha)$.

Bsp. 4: $T_2 = (1)(23)(45)T_1$

Def. 5: $P_T := \{g \in S_n \mid g$ permutiert nur innerhalb der Zeilen von $T\}$ ist die Untergruppe der Zeilenpermutationen.
$Q_T := \{g \in S_n \mid g$ permutiert nur innerhalb der Spalten von $T\}$ ist die Untergruppe der Spaltenpermutationen.

Bsp. 5: $P_{T_2} = \{(1), (1,3), (2,5), (1,3)(2,5)\}$,
$Q_{T_2} = \{(1), (1,2), (1,4), (2,4), (1,2,4), (1,4,2), (3,5), (3,5)(1,2), (3,5)(1,4), (3,5)(2,4),$
$(3,5)(1,2,4), (3,5)(1,4,2)\}$

Def. 6: Definiere $a_T := \sum\limits_{p \in P_T} p \in A$, $b_T := \sum\limits_{q \in Q_T} \operatorname{sgn}(q) q \in A$ und $c_T := a_T b_T \in A$. c_T wird als Young-Symmetrierer bezeichnet.

Theorem

Das Modul $Ac_T = \{a \cdot c_T \mid a \in A\}$ ist eine irreduzible Darstellung von S_n. Darstellungen, die durch verschiedene Tableaus mit gleichem Diagramm erhalten werden, sind isomorph, aber nicht Darstellungen, die durch Tableaus verschiedener Diagramme erhalten werden. Alle irreduziblen Darstellungen können so erhalten werden.

Beweis:

1. Beh.: $P_T \cap Q_T = \{(1)\}$
   Bew.: Sei $g \in P_T \cap Q_T$.
   $\Rightarrow g$ bewegt kein Element aus dessen Zeile und Spalte.
   $\Rightarrow g = (1)$

2. Beh.: $pq \neq p'q' \;\forall p, p' \in P_T \;\forall q, q' \in Q_T$ mit $p \neq p', q \neq q'$
   Bew.: Angenommen $\exists p, p' \in P_T \;\exists q, q' \in Q_T : p \neq p', q \neq q', pq = p'q'$
   $\Rightarrow p'^{-1}p = q'q^{-1} \in P_T \cap Q_T$
   $\Rightarrow_{\text{1. Beh.}} p'^{-1}p = q'q^{-1} = (1)$
   $\Rightarrow p = p', q = q'$

   Daraus folgt: $c_T \neq 0$

3. Beh.: $\forall p \in P_T \;\forall q \in Q_T : pa_T = a_T p = a_T, (\operatorname{sgn}(q)q)b_T = b_T(\operatorname{sgn}(q)q) = b_T, pc_T(\operatorname{sgn}(q)q) = c$
   Bew.: Seien $p \in P_T, q \in Q_T$.
   $\varphi_p : P_T \to P_T, g \mapsto pg$ ist bijektiv, denn angenommen sie wäre nicht injektiv:
      Dann $\exists g, g' \in P_T : g \neq g', \varphi_p(g) = \varphi_p(g')$
      $\Rightarrow pg = pg' \Rightarrow g = g'$
      Also ist φ_p injektiv und damit auch surjektiv.
   $\Rightarrow pa_T = p \sum\limits_{g \in P_T} g = \sum\limits_{g \in P_T} pg = \sum\limits_{g \in P_T} g = a_T$
   $\varphi_q : Q_T \to Q_T, g \mapsto (\operatorname{sgn}(q)q)g$ ist bijektiv, denn angenommen sie wäre nicht injektiv:
      Dann $\exists g, g' \in Q_T : g \neq g', \varphi_q(g) = \varphi_q(g')$
      $\Rightarrow (\operatorname{sgn}(q)q)g = (\operatorname{sgn}(q)q)g' \Rightarrow qg = qg' \Rightarrow g = g'$
      Also ist φ_q injektiv und damit auch surjektiv.
   $\Rightarrow (\operatorname{sgn}(q)q)b_T = (\operatorname{sgn}(q)q) \sum\limits_{g \in Q_T} g = \sum\limits_{g \in Q_T} (\operatorname{sgn}(q)q)g = \sum\limits_{g \in Q_T} g = b_T$
   Analog: $a_T p = a_T, b_T(\operatorname{sgn}(q)q) = b_T$
   $\Rightarrow pc_T(\operatorname{sgn}(q)q) = pa_T b_T(\operatorname{sgn}(q)q) = a_T b_T = c_T$

4. Beh.: Seien $g, h \in S_n, T' := gT$. Aus $T(i,j) = hT(i',j')$ folgt $T'(i,j) = ghg^{-1}T'(i',j')$.
   Bsp.: $g = (135), h = (132)(45) \Rightarrow ghg^{-1} = (14)(235)$

1	3
2	5
4	

(c) T

3	5
2	1
4	

(d) T'

3	2
1	4
5	

(e) hT

5	2
3	4
1	

(f) $ghg^{-1}T'$

   Bew.: $\alpha := T(i,j) = hT(i',j'), \beta := T(i',j')$
   $\Rightarrow h(\beta) = \alpha, g(\alpha) = T'(i,j), g(\beta) = T'(i',j')$
   $\Rightarrow ghg^{-1}T'(i',j') = ghg^{-1}g(\beta) = gh(\beta) = g(\alpha) = T'(i,j)$

5. Beh.: $\forall g \in S_n : P_{gT} = gP_Tg^{-1}, Q_{gT} = gQ_Tg^{-1}, c_{gT} = gc_Tg^{-1}$
Bew.: Sei $p \in P_T, g \in S_n$.
$\Rightarrow T(i,j) = pT(i,j')$
$\Rightarrow_{\text{4. Beh.}} gT(i,j) = gpg^{-1}gT(i,j')$
$\Rightarrow T(i,j) = g^{-1}gT(i,j) = g^{-1}gpg^{-1}gT(i,j') = pT(i,j')$
Also: $p \in P_T$ gdw. $gpg^{-1} \in P_{gT}$
$\Rightarrow P_{gT} = gP_Tg^{-1}$
Analog: $Q_{gT} = gQ_Tg^{-1}$
$\Rightarrow c_{gT} = a_{gT}b_{gT} = \left(\sum\limits_{p\in P_{gT}} p\right)\left(\sum\limits_{q\in Q_{gT}} \operatorname{sgn}(q)q\right) = \sum\limits_{p\in P_{gT}, q\in Q_{gT}} \operatorname{sgn}(q)pq = \sum\limits_{p\in P_T, q\in Q_T} \operatorname{sgn}(q)gpg^{-1}gqg^{-1}$
$\quad = g\left(\sum\limits_{p\in P_T, q\in Q_T} \operatorname{sgn}(q)pq\right)g^{-1} = g\left(\sum\limits_{p\in P_T} p\right)\left(\sum\limits_{q\in Q_T} \operatorname{sgn}(q)q\right)g^{-1} = ga_Tb_Tg^{-1} = gc_Tg^{-1}$

6. Beh.: $\forall g \in S_n : Ac_T \cong Ac_{gT}$
Bew.: Mit 5. Beh. folgt: $Ac_{gT} = Agc_Tg^{-1} = Ac_Tg^{-1} \cong Ac_T$,
da $\varphi : Ac_T \to Ac_{gT}, x \mapsto xg^{-1}$ bijektiv ist.
Beweis der Injektivität wie bei 3. Beh.
Sei $y \in Ac_{gT}$. Setze $x := yg \in Ac_T$. $\Rightarrow \varphi(x) = xg^{-1} = ygg^{-1} = y$. $\Rightarrow \varphi$ ist surjektiv.

7. Beh.: $\forall g \in S_n : g \notin P_TQ_T \Rightarrow$ Es gibt zwei verschiedene Zahlen in derselben Zeile in T und in derselben Spalte in gT.
Bew.: Angenommen es gäbe keine solche zwei Zahlen.
$\Rightarrow$ Alle Zahlen der 1. Spalte von gT sind in verschiedenen Zeilen in T.
$\Rightarrow \exists p_1 \in P_T$: alle diese Zahlen sind 1. Spalte von p_1T.
Vorgehen wiederholen $\Rightarrow \exists p \in P_T$: Spalten von gT und pT enthalten die gleichen Zahlen
$\Rightarrow \exists q' \in Q_{pT} : gT = q'pT$
$\Rightarrow_{\text{5. Beh.}} \exists q \in Q_T : q' = pqp^{-1}$
$\Rightarrow gT = pqp^{-1}pT = pqT$
$\Rightarrow g = pq$

8. Beh.: Seien $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ und $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ und T_λ bzw. T_μ zugehörige Tableaus. Aus $\lambda > \mu$ folgt $a_{T_\lambda}xb_{T_\mu} = 0\,\forall x \in A$ und insbesondere $c_{T_\lambda}c_{T_\mu} = 0$.
Bew.: Es gibt zwei verschiedenen Zahlen α und β in derselben Zeile von T_λ und in derselben Spalte von T_μ. Ansonsten stünden die λ_1 Zahlen aus der 1. Zeile von T_λ in verschiedenen Spalten von T_μ.
$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1$ und $\exists q \in Q_{T_\mu}$: 1. Zeilen von qT_μ und T_λ haben die gleichen Zahlen
Vorgehen wiederholen $\Rightarrow \lambda_2 = \mu_2, \dots$
Setze $t := (\alpha\,\beta) \in S_n \Rightarrow t \in P_{T_\lambda}, t \in Q_{T_\mu}$
$\Rightarrow_{\text{3. Beh.}} a_{T_\lambda}b_{T_\mu} = (a_{T_\lambda}t)(tb_{T_\mu}) = a_{T_\lambda}(-b_{T_\mu}) = -a_{T_\lambda}b_{T_\mu}$
$\Rightarrow a_{T_\lambda}b_{T_\mu} = 0$
Aus 5. Beh. folgt:
$\forall g \in S_n : b_{gT_\mu} = \sum\limits_{q\in Q_{gT_\mu}} \operatorname{sgn}(q)q = \sum\limits_{q\in Q_{T_\mu}} \operatorname{sgn}(q)gqg^{-1} = g\left(\sum\limits_{q\in Q_{T_\mu}} \operatorname{sgn}(q)q\right)g^{-1} = gb_{T_\mu}g^{-1}$
$\Rightarrow a_{T_\lambda}gb_{T_\mu}g^{-1} = a_{T_\lambda}b_{gT_\mu} = 0\,\forall g \in S_n$
$\Rightarrow$ Für $x = \sum\limits_{g\in S_n} \alpha_g g \in A$ mit $\alpha_g \in \mathbb{C}$ gilt: $a_{T_\lambda}\alpha_g gb_{T_\mu} = a_{T_\lambda}\alpha_g gb_{T_\mu}g^{-1}g = (a_{T_\lambda}gb_{T_\mu}g^{-1})(\alpha_g g) = 0$
$\Rightarrow a_{T_\lambda}xb_{T_\mu} = a_{T_\lambda}\left(\sum\limits_{g\in S_n} \alpha_g g\right)b_{T_\mu} = \sum\limits_{g\in S_n} a_{T_\lambda}\alpha_g gb_{T_\mu} = 0$
$\Rightarrow c_{T_\lambda}c_{T_\mu} = a_{T_\lambda}(b_{T_\lambda}a_{T_\mu})b_{T_\mu} = 0$

9. Beh.: Sei $x \in A$, so dass $px(\operatorname{sgn}(q)q) = x\,\forall p \in P_T\,\forall q \in Q_T$. Dann $\exists \gamma \in \mathbb{C} : x = \gamma c_T$.
Bew.: Sei $x = \sum\limits_{g\in S_n} \alpha_g g, \alpha_g \in \mathbb{C}$.
$\Rightarrow x = \operatorname{sgn}(q)p^{-1}xq^{-1} = \operatorname{sgn}(q)\sum\limits_{g\in S_n} \alpha_g(p^{-1}gq^{-1}) = \operatorname{sgn}(q)\sum\limits_{h\in S_n} \alpha_{phq}h\,\forall p \in P_T\,\forall q \in Q_T$,
da $\varphi : S_n \to S_n, g \mapsto p^{-1}gq^{-1}$ bijektiv (Bew. wie bei 3. Beh.)
$\Rightarrow \forall g \in S_n\,\forall p \in P_T\,\forall q \in Q_T : \alpha_{pgq} = \operatorname{sgn}(q)\alpha_g$, insbesondere $\alpha_{pq} = \operatorname{sgn}(q)\alpha_{(1)}$
$\Rightarrow$ Noch zu zeigen: Aus $g \notin P_TQ_T$ folgt $\alpha_g = 0$:
$\Rightarrow_{\text{7. Beh.}}$ Es gibt zwei verschiedene Zahlen α und β in derselben Spalte in T und in derselben Spalte in gT.

Setze $t := (\alpha\,\beta) \in S_n \Rightarrow t \in P_T, t \in Q_{gT}$
$\Rightarrow_{\text{5. Beh.}} \exists q \in Q_T : t = gqg^{-1}$
$\Rightarrow tg = gq \Rightarrow tgq^{-1} = g$
$\Rightarrow \alpha_g = \operatorname{sgn}(q^{-1})\alpha_{tgq^{-1}} = -\alpha_g$, da $q = g^{-1}tg$ Transposition
$\Rightarrow \alpha_g = 0$

10. Beh.: $\exists \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : c_T^2 = \gamma c_T$
Bew.: Seien $p \in P_T, q \in Q_T$.
$\Rightarrow_{\text{3. Beh.}} pc_T^2 q = (pa_T)b_T a_T(b_T q) = a_T b_T a_T(\operatorname{sgn}(q)b_T) = \operatorname{sgn}(q)c_T^2$
$\Rightarrow_{\text{9. Beh.}} \exists \gamma \in \mathbb{C} : c_T^2 = \gamma c_T$.
Zeige: $\gamma \neq 0$:
Sei $\varphi : A \to A, x \mapsto xc_T$.
Betrachte Matrixdarstellung B zur $\mathbb{C}$-Basis $\{g_1 := (1), \ldots, g_{n!}\}, g_i \in S_n \,\forall i = \{1, \ldots, n!\}$.
Schreibe $c_T = \alpha_1 g_1 + \ldots$ mit $\alpha_i \in \mathbb{C}\,\forall i = \{1, \ldots, n!\}$:
$$\begin{array}{lllll} & g_1 c_T = c_T = & \alpha_1 g_1 & + \ldots & \\ \Rightarrow & g_2 c_T = & * g_1 & + \alpha_1 g_2 + \ldots & \\ & \vdots & & & \end{array}$$
$\Rightarrow \operatorname{tr}(B) = \alpha_1 n! = \operatorname{sgn}((1))n! = n!$
Betrachte Matrixdarstellung B' zur $\mathbb{C}$-Basis $\{v_1, \ldots, v_{n!}\}$, so dass $\{v_1, \ldots, v_f\}$ $\mathbb{C}$-Basis von Ac_T ist.
$\forall x \in Ac_T : \exists y \in A : x = yc_T \Rightarrow xc_T = yc_T^2 = y\gamma c_T = \gamma x$
$$\begin{array}{llllll} & v_1 c_T = & \gamma v_1 & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \\ \Rightarrow & v_f c_T = & & & \gamma v_f & \\ & v_{f+1} c_T = & *+ & \ldots + & *+ & 0 \\ & \vdots & & & & \\ & v_{n!} c_T = & *+ & \ldots + & *+ & 0 \end{array}$$
$\Rightarrow \operatorname{tr}(B') = \gamma f$
$\exists C \in \mathbb{C}^{n! \times n!} : B' = C^{-1}BC$
$\Rightarrow \gamma f = \operatorname{tr}(B') = \operatorname{tr}(C^{-1}BC) = \operatorname{tr}(C^{-1}CB) = \operatorname{tr}(B) = n!$
$\Rightarrow \gamma = \frac{n!}{f} \neq 0$

11. Beh.: Seien $I, I' \subseteq A$ Module mit $A = I \oplus I'$ und $P := \{p : A \to I \mid p$ Projektion $\}$. Dann gilt $P \cong I$.
Bew.: Betrachte $\varphi : I \to P, b \mapsto p_b$ mit $p_b : A \to I, a \mapsto ab$. Dann ist φ offensichtlich injektiv. Für die Surjektivität zeige, dass jedes $p \in P$ von der Form $p(a) = ab$ mit $b \in I$ ist.
Sei also $p \in P$. Setze $b := p(1) \in I$.
$\Rightarrow \forall a \in A : p(a) = p(a \cdot 1) = a \cdot p(1) = ab$

12. Beh.: Ac_T ist eine irreduzible Darstellung von S_n.
Bew.: Setze für $I_1, I_2 \subseteq A : I_1 I_2 := \{a \cdot b \mid a \in I_1, b \in I_2\}$.
Sei $x \in c_T A c_T \Rightarrow \exists y \in A : x = c_T y c_T$
$\Rightarrow_{\text{3. Beh.}} \forall p \in P_T \,\forall q \in Q_T$:
$pxq = pc_T y c_T q = (pa_T)b_T y a_T(b_T q) = a_T b_T y a_T(\operatorname{sgn}(q)b_T) = \operatorname{sgn}(q)c_T y c_T = \operatorname{sgn}(q)x$
$\Rightarrow_{\text{9. Beh.}} \exists \gamma \in \mathbb{C} : x = \gamma c_T$
$\Rightarrow c_T A c_T \subseteq \mathbb{C}c_T$
Sei $I \subseteq Ac_T$ Unterdarstellung. $\Rightarrow c_T I \subseteq c_T A c_T \subseteq \mathbb{C}c_T$
Da $\mathbb{C}c_T$ eindimensional, gibt es nur 2 Fälle:

(a) $c_T I = \mathbb{C}c_T$
$\Rightarrow Ac_T = A\mathbb{C}c_T = Ac_T I \subseteq AI \subseteq I \Rightarrow I = Ac_T$

(b) $c_T I = \{0\}$
$\Rightarrow I^2 = II \subseteq Ac_T I = \{0\} \Rightarrow_{\text{11. Beh.}} \forall b \in I : b = b^2 = 0 \Rightarrow I = \{0\}$

13. Beh.: Seien $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ und $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ Partitionen von $n \in \mathbb{N}$ und T_λ bzw. T_μ zugehörige Tableaus. Aus $\lambda \neq \mu$ folgt $Ac_{T_\lambda} \ncong Ac_{T_\mu}$.
Bew.: OBdA sei $\lambda > \mu$.
$\Rightarrow_{\text{10.+8. Beh.}} c_{T_\lambda} A c_{T_\lambda} = \mathbb{C}c_{T_\lambda}, c_{T_\lambda} A c_{T_\mu} = a_{T_\lambda} b_{T_\lambda} A a_{T_\mu} b_{T_\mu} = 0$
$\Rightarrow Ac_{T_\lambda} \ncong Ac_{T_\mu}$

14. Beh.: Jede Konjugationsklasse in S_n entspricht genau einer Partition von n.
Bew.: Jede Permutation kann als Produkt von (paarweise disjunkten) Zykeln geschrieben werden.
Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,5)(2\,6)(4)$.
Eine Konjugationsklasse von S_n ist die Menge aller Permutationen, die die gleiche Anzahl Zykel mit je gleicher Länge haben. Denn:
Sei $\sigma \in S_n$ mit Zykeldarstellung $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$.
$\Rightarrow g\sigma g^{-1} = g\sigma_1 g^{-1} \dots g\sigma_k g^{-1}$
$\Rightarrow$ Konjugation erhält Struktur in Zykeldarstellung
Außerdem: Aus einer Permutation können durch Konjugation alle Permutationen mit gleicher Struktur in der Zykeldarstellung erhalten werden.
Ordne nun der Konjugationsklasse von $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$ (mit absteigend nach der Länge sortierten Zykeln) die Partition $(|\sigma_1|, \dots, |\sigma_k|)$ zu, wobei $|\sigma_j|$ die Länge von Zykel σ_j bezeichne ($\forall j \in \{1, \dots, k\}$).

Fazit

Da die Anzahl der irreduziblen Darstellungen von S_n der Anzahl der Konjugationsklassen von S_n und damit der Anzahl der Partitionen von n entspricht und wir gesehen haben, dass zu jeder Partition genau eine irreduzible Darstellung gehört, ist das Theorem bewiesen.