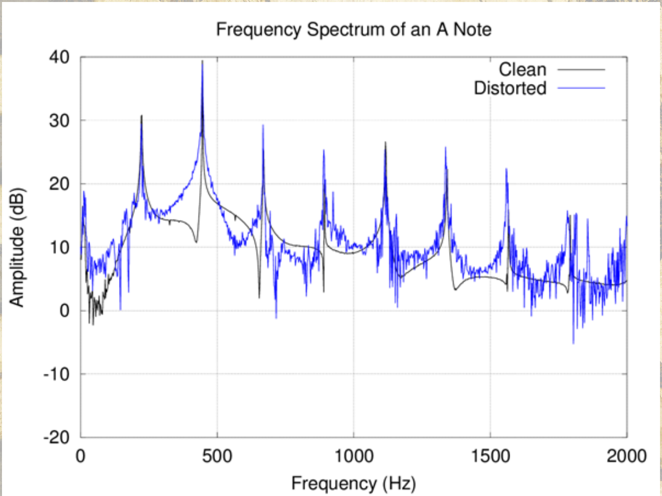
Mathematik in Musiktheorie und -praxis

Kathlén Kohn

Tag der Mathematik 2017

Mathematik und Musik: Frequenzanalyse



(Luke Currano, http://tonereport.com/blogs/lifestyle/whats-the-frequency-kenneth-the-science-of-tone/)

Mathematik und Musik: Computer komponieren

(Donald Papp, https://hackaday.com/2017/03/17/neural-network-composes-music-says-ill-be-bach/)

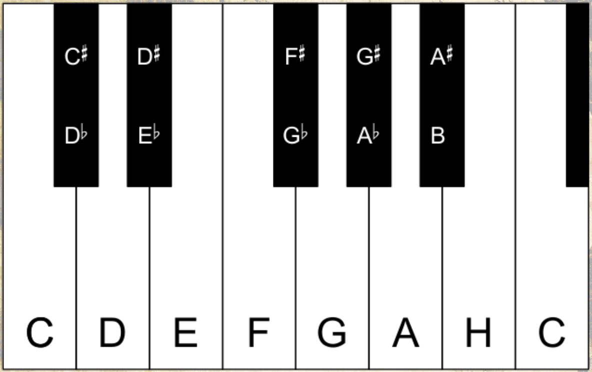
Improvisieren lernen

Statt *ALLE* Skalen (Tonleitern) zu lernen:
Mathematischer Ansatz:

- Ordne Skalen systematisch
- Idee: Wähle einige Skalen als **Grundfarben**, übrige Skalen sind **Mischfarben**

Welche Skalen sind als Grundfarben geeignet?

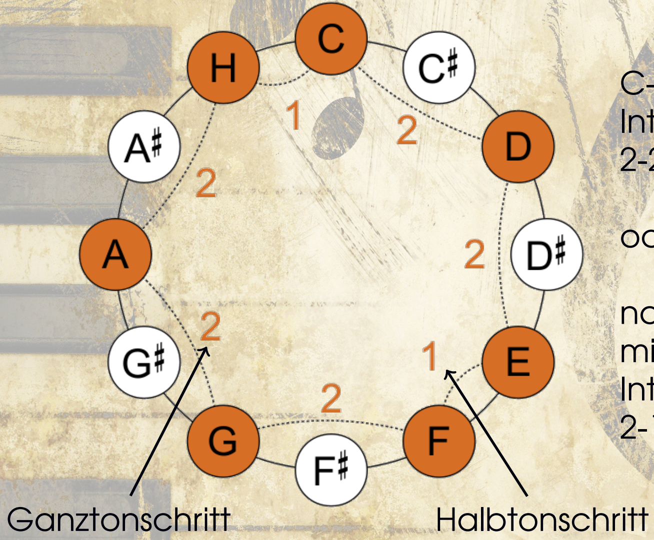
Tonsystem



Definition

Eine ***Skala*** *ist eine Teilmenge von*
$\{C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp, H\}$.

Zyklische Tonordnung

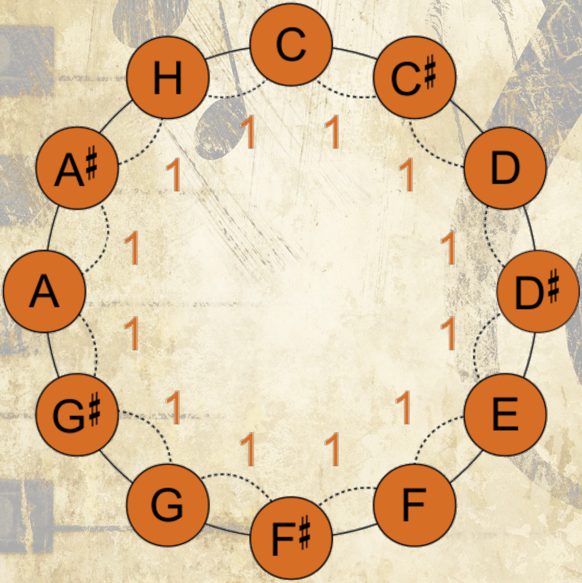


C-Dur-Skala mit Intervallfolge 2-2-1-2-2-2-1

oder

natürlich a-Moll mit Intervallfolge 2-1-2-2-1-2-2

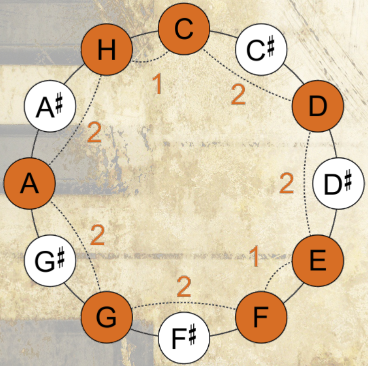
Chromatische Skala



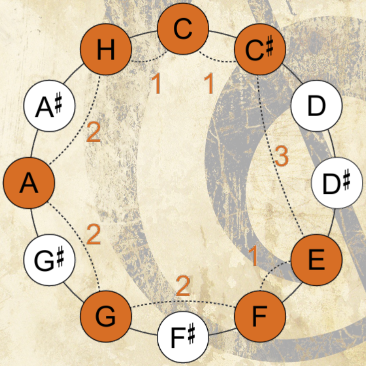
Grundfarben

Definition (Ernst Ulrich Deuker)

Eine Skala heißt ***nicht-chromatisch****, falls ihre Intervallfolge keine 2 aufeinanderfolgenden Halbtonschritte enthält.*



Beispiel

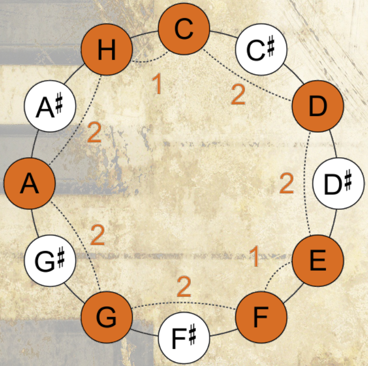


Gegenbeispiel

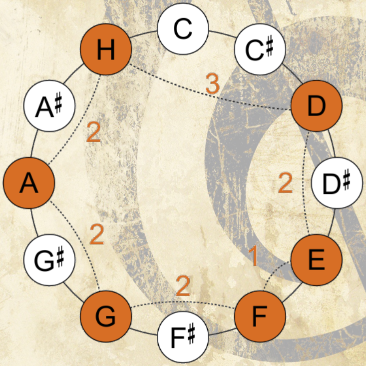
Grundfarben

Definition (Ernst Ulrich Deuker)

Eine Skala heißt ***maximal nicht-chromatisch****, falls sie nicht-chromatisch ist und in keiner anderen nicht-chromatischen Skala enthalten ist.*



Beispiel



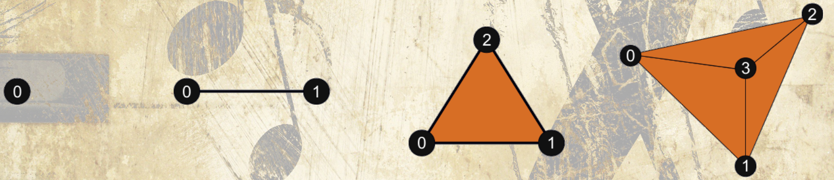
Gegenbeispiel

Frage eines Musikers:

Welche Skalen sind maximal nicht-chromatisch?

Nun die Antwort eines **Mathematikers**. . .

Mathematische Perspektive



0-dimensionaler Simplex	1-dimensionaler Simplex	2-dimensionaler Simplex	3-dimensionaler Simplex
$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$

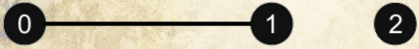
- Ein ***n*-dimensionaler Simplex** ist die konvexe Hülle von $(n + 1)$ unabhängigen Punkten im n-dimensionalen Raum.
- Jede Fläche eines Simplex ist wieder ein Simplex.

Mathematische Perspektive

Definition

Ein **Simplizialkomplex** *ist eine Menge $\mathcal{K}$ von Simplizes, sodass für jeden Simplex S in $\mathcal{K}$ und jede Fläche T von S gilt, dass auch T in $\mathcal{K}$ ist.*

Beispiel



$\mathcal{K}_1 = \{\{0, 1\}, \{2\}\}$ *ist KEIN Simplizialkomplex*
$\mathcal{K}_2 = \{\{0, 1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$ *ist Simplizialkomplex*

Mathematische Perspektive

Definition

Ein ***Simplizialkomplex*** *ist eine Menge $\mathcal{K}$ von Simplizes, sodass für jeden Simplex S in $\mathcal{K}$ und jede Fläche T von S gilt, dass auch T in $\mathcal{K}$ ist.*

Beispiel

Eine Skala mit $(n+1)$ Tönen ist ein n-dimensionaler Simplex.
Die Menge aller nicht-chromatischen Skalen ist ein Simplizialkomplex.
Diesen bezeichnen mit $\mathcal{K}_{NC}$.

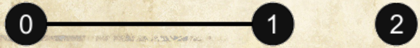
Erste Info: f-Vektor

Definition

*Wir bezeichnen mit f_n die Anzahl der n-dimensionalen Simplizes in einem gegebenen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$. Die Liste $(f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots)$ heißt **f-Vektor** von $\mathcal{K}$.*

Beispiel

$\mathcal{K}_2 = \{\{0, 1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$ *hat f-Vektor* $(1, 3, 1)$.



Erste Info: f-Vektor

Definition

*Wir bezeichnen mit f_n die Anzahl der n-dimensionalen Simplizes in einem gegebenen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$. Die Liste $(f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots)$ heißt **f-Vektor** von $\mathcal{K}$.*

Beispiel

Der Komplex $\mathcal{K}_{NC}$ der nicht-chromatischen Skalen hat den f-Vektor

$$\begin{matrix} (1, & 12, & 66, & 208, & 399, & 456, & 282, & 72, & 3) \\ (f_{-1}, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4, & f_5, & f_6, & f_7) \end{matrix}$$

Es gibt keine nicht-chromatische Skala mit 9 oder mehr Tönen.

Facetten

Definition

Ein Simplex S in einem Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ ist eine ***Facette*** *von $\mathcal{K}$, falls S nicht eine Fläche von einem anderen Simplex in $\mathcal{K}$ ist.*

Beispiel

- $\mathcal{K}_2 = \{\{0,1\},\{0\},\{1\},\{2\},\emptyset\}$ *hat Facetten* $\{0,1\}$ *und* $\{2\}$

- *Die maximal nicht-chromatischen Skalen sind die Facetten von $\mathcal{K}_{NC}$.*

Facetten von $\mathcal{K}_{NC}$

f-Vektor

$$\begin{array}{ccccccccc} (1, & 12, & 66, & 208, & 399, & 456, & 282, & 72, & 3) \\ (f_{-1}, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4, & f_5, & f_6, & f_7) \end{array}$$

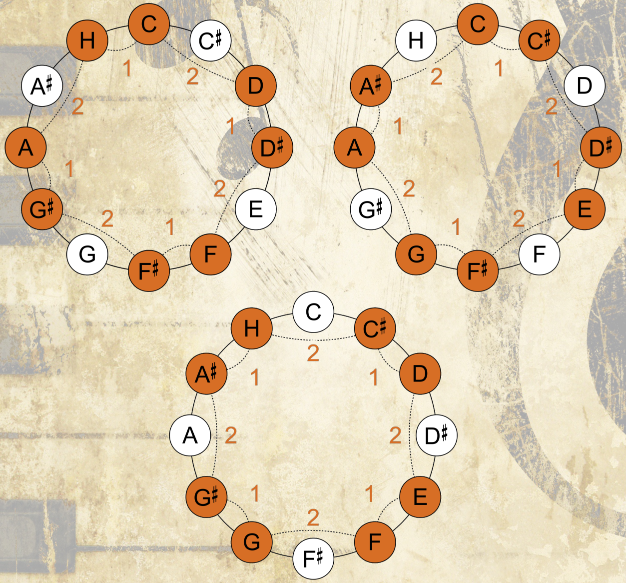
- Es gibt keine nicht-chromatische Skala mit 9 oder mehr Tönen.
- Es gibt 3 Facetten mit 8 Tönen.
- Es gibt mindestens $48 (= 72 - 3 \cdot 8)$ Facetten mit 7 Tönen (z.B. C-Dur).

Facetten von $\mathcal{K}_{NC}$

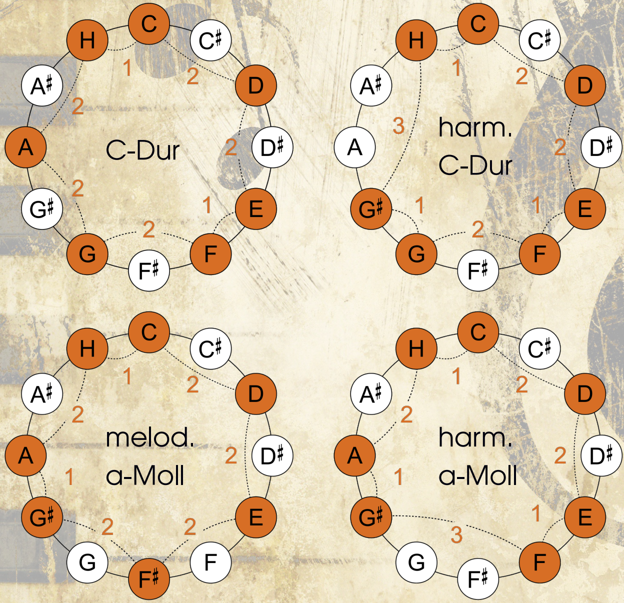
$\mathcal{K}_{NC}$ hat genau 57 Facetten:

Anzahl Töne	Intervallfolge	Anzahl Skalen	Name
8	2-1-2-1-2-1-2-1	3	vermindert
7	2-2-1-2-2-2-1	12	Dur
7	2-1-2-2-2-2-1	12	melodisch Moll
7	2-1-2-2-1-3-1	12	harmonisch Moll
7	2-2-1-2-1-3-1	12	harmonisch Dur
6	2-2-2-2-2-2	2	Ganzton
6	1-3-1-3-1-3	4	übermäßig

Verminderte Skalen

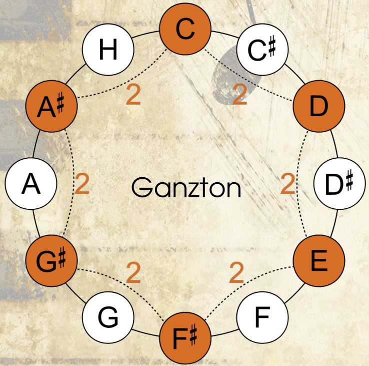


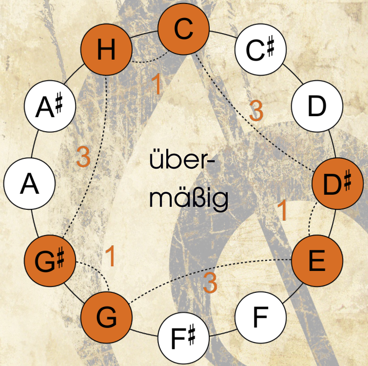
Dur & Moll



C-Dur
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ H
1 2 2 1 2 2 2
harm.
C-Dur
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ H
1 2 2 1 2 1 3
melod.
a-Moll
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ H
1 2 2 2 2 1 2
harm.
a-Moll
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ H
1 2 2 1 3 1 2

Ganzton- & übermäßige Skala





Frage eines Mathematikers:

Welche Topologie hat der Simplizialkomplex $\mathcal{K}_{NC}$?

Musiker und Mathematiker antworten gemeinsam…

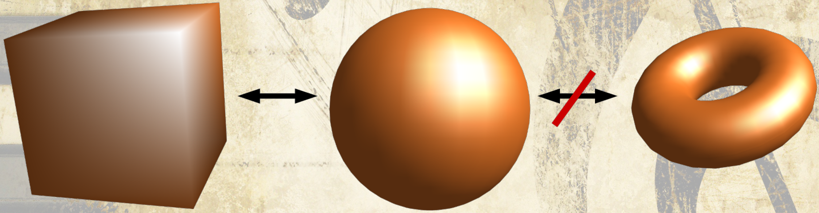
Topologie: Löcher zählen

(Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1236079)

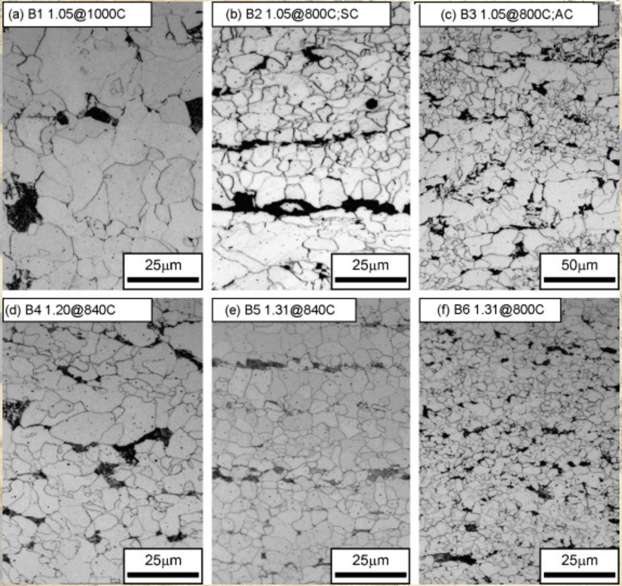
Welche Eigenschaften von Räumen bleiben erhalten, wenn man diese dehnt, staucht, biegt oder verzerrt? (Operationen wie Zerschneiden oder Zusammenkleben sind nicht erlaubt.)

Anzahl von Löchern

Topologie: Löcher zählen



Warum wollen wir Löcher zählen?

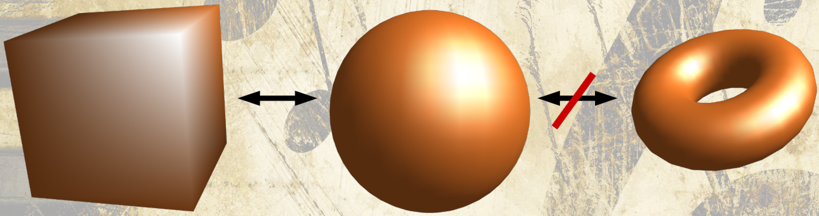


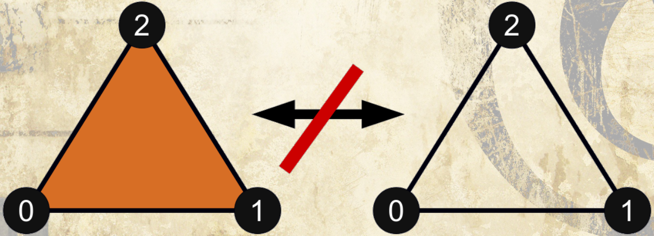
(Muszka, Hodgson, Majta, 2009)

Stahl nach verschiedenen Abkühlungs-verfahren

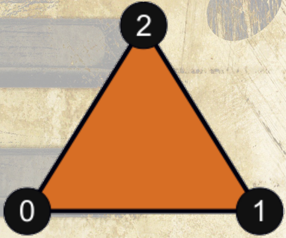
Ziel: Finde optimale Stahlstruktur durch Löcherzählen

Topologie: Löcher zählen





Löcher in Simplizialkomplexen



$$\mathcal{K}_{\blacktriangle} = \{\{0,1,2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0\},\{1\},\{2\},\emptyset\}$$

$$\mathcal{K}_{\triangle} = \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0\},\{1\},\{2\},\emptyset\}$$

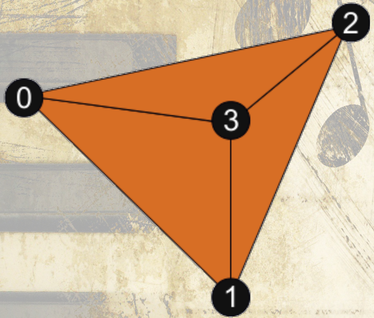
hat keine Löcher

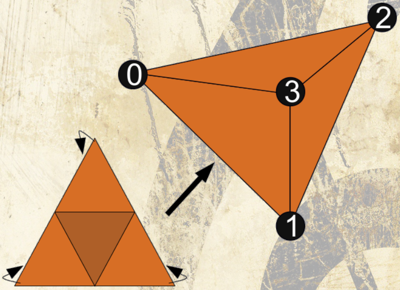
hat ein 1-dimensionales Loch

Facetten: $\{0,1,2\}$

Facetten: $\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}$

Löcher in Simplizialkomplexen





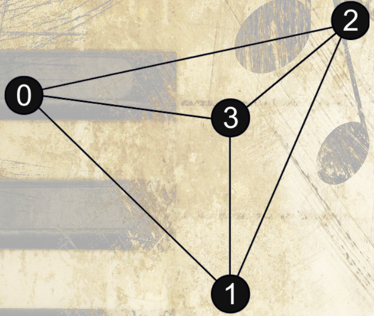
(als solides Objekt)
hat keine Löcher

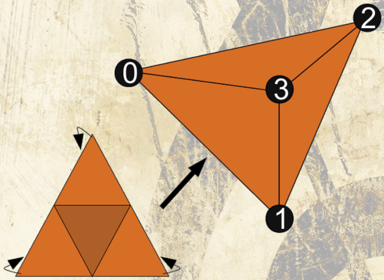
Facetten: $\{0, 1, 2, 3\}$

(als hohles Objekt)
hat ein 2-dimensionales Loch

Facetten:
$\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

Löcher in Simplizialkomplexen





hat **drei** 1-dimensionale Löcher

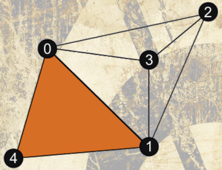
Facetten:
$\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}$,
$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

(als hohles Objekt)
hat ein 2-dimensionales Loch

Facetten:
$\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}$

Löcher in $\mathcal{K}_{NC}$

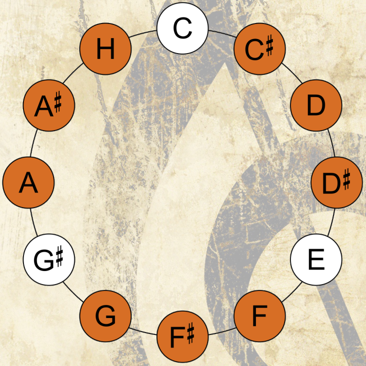
- $\mathcal{K}_{NC}$ hat genau 3 Löcher der Dimension 5
  - D.h. jedes Loch hat auf dem Rand Skalen mit 6 Tönen
- Skalen mit 7 oder 8 Tönen sitzen außen um Löcher herum



Was ist die Bedeutung der Löcher?

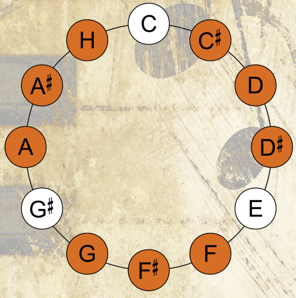
Messiaens Skala (rechts)

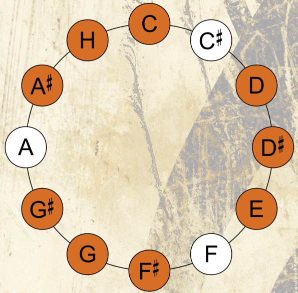
- hat 9 Töne
- enthält 27 nicht-chromatische Skalen mit 6 Tönen

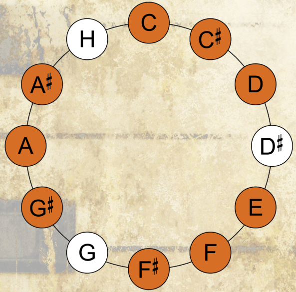


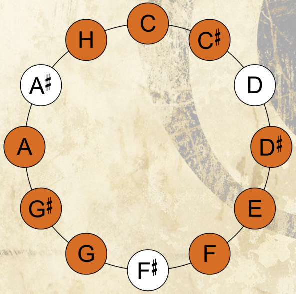
Diese 27 Skalen formen den Rand für ein Loch.

4 Messiaen-Skalen

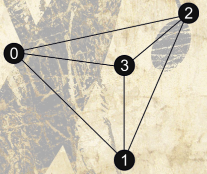








Warum nur 3 Löcher?

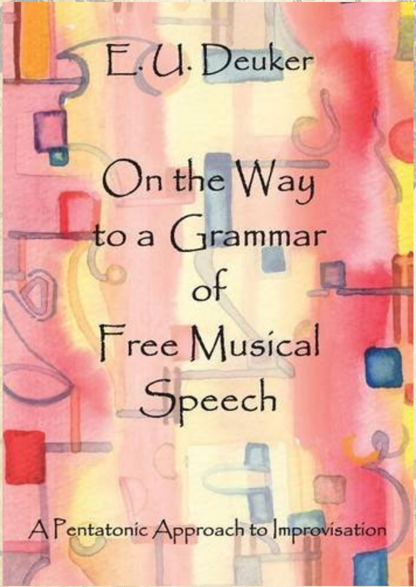


Man kann immer nur 3 Löcher gleichzeitig “sehen”

Resümee

- Vorschlag für Grundfarben in der Skalentheorie:
  - **57 maximale nicht-chromatische Skalen**
  - mit 7 veschiedenen Intervallfolgen,
  - übrige Skalen daraus mischen
- Topologie der nicht-chromatischen Skalen
- Offene Fragen:
  - musikalische Wirkung der Löcher,
  - Vergleich mit anderen sinnvollen (?) Modellen für Grundfarben,
  - etc.

Musikalische Idee des Projekts



(Deuker, 2016)