Der Komplex der nicht-chromatischen Skalen

Kathlén Kohn

Königliche Technische Hochschule Stockholm

Improvisieren lernen

Statt *ALLE* Skalen (Tonleitern) zu lernen:
Mathematischer Ansatz:

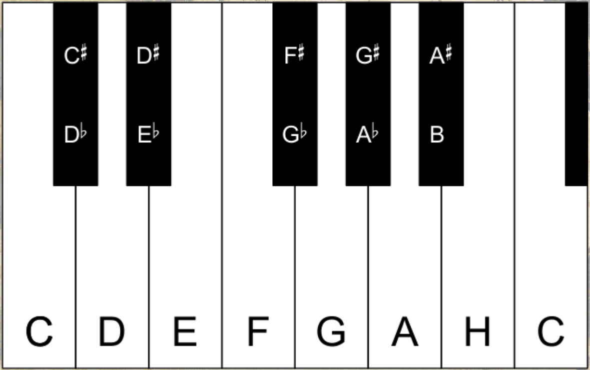
- Ordne Skalen systematisch
- Idee: Wähle einige Skalen als **Grundfarben**, übrige Skalen sind **Mischfarben**

Welche Skalen sind als Grundfarben geeignet?

Improvisieren lernen

Sprache	Malerei	Musik
26 Buchstaben/8 Satz-elemente (Substantive, Verben, Adjektive…)	3 Primärfarben (gelb, blau, rot, plus schwarz, weiss)	57 nichtchromatische Skalen
↓	↓	↓
	Mischfarben	Mischskalen, chromatische Durchgänge
↓	↓	↓
Sätze	Bilder	Melodien

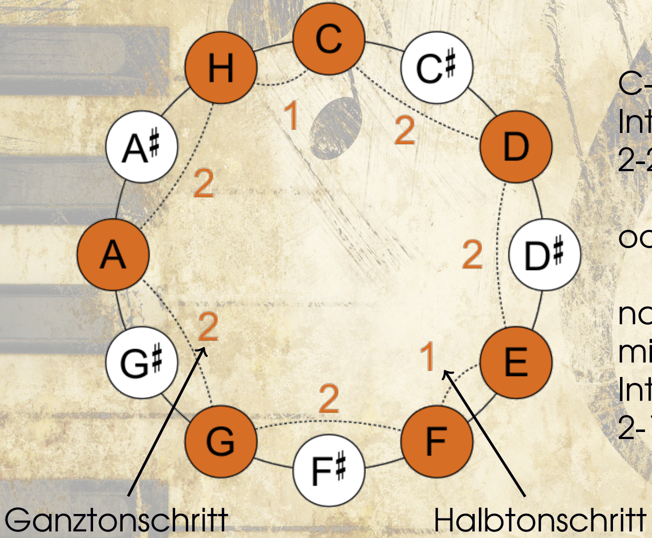
Tonsystem



Definition

Eine ***Skala*** *ist eine Teilmenge von*
$\{C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp, H\}$.

Zyklische Tonordnung

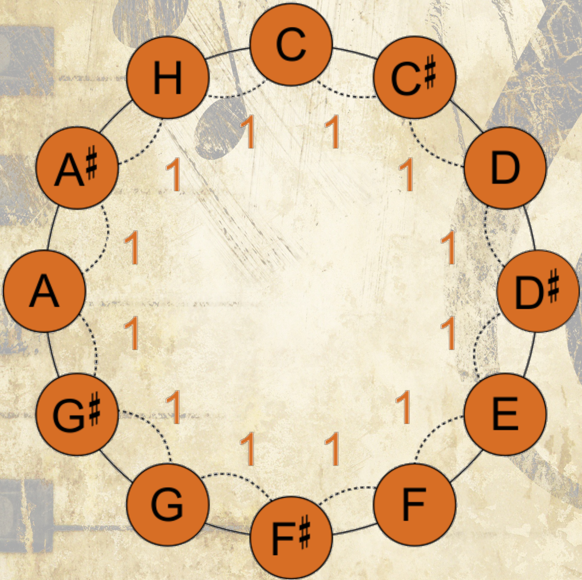


C-Dur-Skala mit Intervallfolge 2-2-1-2-2-2-1

oder

natürlich a-Moll mit Intervallfolge 2-1-2-2-1-2-2

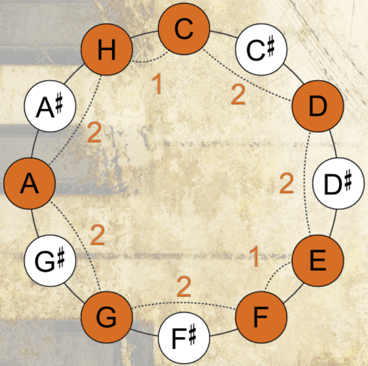
Chromatische Skala



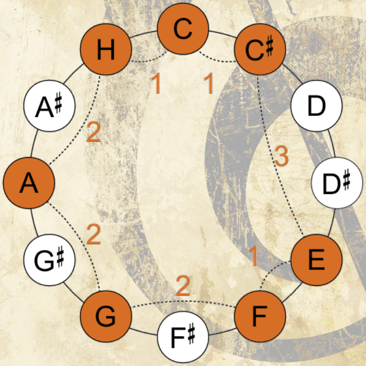
Grundfarben

Definition (Ernst Ulrich Deuker)

*Eine Skala heißt **nicht-chromatisch**, falls ihre Intervallfolge keine 2 aufeinanderfolgenden Halbtonschritte enthält.*



Beispiel

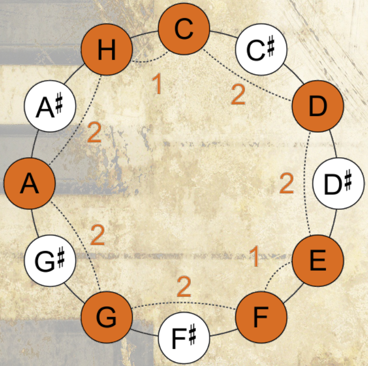


Gegenbeispiel

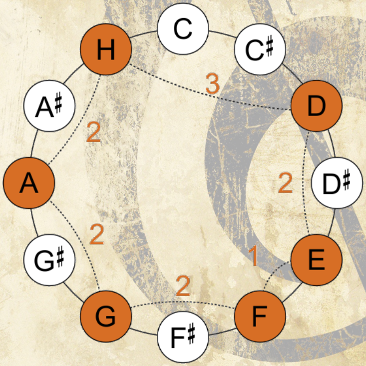
Grundfarben

Definition (Ernst Ulrich Deuker)

*Eine Skala heißt **maximal nicht-chromatisch**, falls sie nicht-chromatisch ist und in keiner anderen nicht-chromatischen Skala enthalten ist.*



Beispiel



Gegenbeispiel

Eine **musikalische** Frage:

Welche Skalen sind maximal nicht-chromatisch?

Nun eine **mathematische** Antwort. . .

Mathematische Perspektive

Definition

Ein ***Simplizialkomplex*** *auf einer Grundmenge* $\mathcal{G}$ *ist eine Menge* $\mathcal{K}$ *von endlichen Teilmengen von* $\mathcal{G}$*, sodass für jede Menge* $M \in \mathcal{K}$ *und jede Teilmenge* $T \subseteq M$ *gilt, dass auch* $T \in \mathcal{K}$ *ist.*

Beispiel

- $\mathcal{G} = \{0, 1, 2\}$
  $\mathcal{K}_1 = \{\{0, 1\}, \{2\}\}$ *ist KEIN Simplizialkomplex*
  $\mathcal{K}_2 = \{\{0, 1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$ *ist Simplizialkomplex*

Mathematische Perspektive

Definition

Ein **Simplizialkomplex** auf einer Grundmenge $\mathcal{G}$ ist eine Menge $\mathcal{K}$ von endlichen Teilmengen von $\mathcal{G}$, sodass für jede Menge $M \in \mathcal{K}$ und jede Teilmenge $T \subseteq M$ gilt, dass auch $T \in \mathcal{K}$ ist.

Beispiel

- $\mathcal{G} = \{0, 1, 2\}$
  $\mathcal{K}_1 = \{\{0, 1\}, \{2\}\}$ ist KEIN Simplizialkomplex
  $\mathcal{K}_2 = \{\{0, 1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$ ist Simplizialkomplex

- $\mathcal{G} = \{C, C\sharp, D, D\sharp, E, F, F\sharp, G, G\sharp, A, A\sharp, H\}$
  $\mathcal{K}_{NC} = \{S \subseteq \mathcal{G} \mid S \text{ ist nicht-chromatisch } \}$ ist Simplizialkomplex

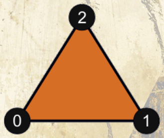
Was ist ein Simplex?

0-dimensionaler Simplex

$\{0\}$

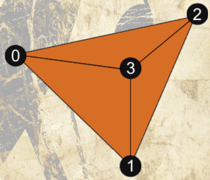
1-dimensionaler Simplex

$\{0, 1\}$



2-dimensionaler Simplex

$\{0, 1, 2\}$

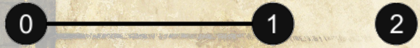


3-dimensionaler Simplex

$\{0, 1, 2, 3\}$

Beispiel

Simplizialkomplex $\mathcal{K}_2 = \{\{0, 1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$



Erste Info: f-Vektor

Definition

Wir bezeichnen mit f_n die Anzahl der n-dimensionalen Simplizes in einem gegebenen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$. Die Liste $(f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots)$ heißt ***f-Vektor*** *von $\mathcal{K}$.*

Beispiel

- $\mathcal{K}_2 = \{\{0, 1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$ *hat f-Vektor* $(1, 3, 1)$

Erste Info: f-Vektor

Definition

*Wir bezeichnen mit f_n die Anzahl der n-dimensionalen Simplizes in einem gegebenen Simplizialkomplex $\mathcal{K}$. Die Liste $(f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots)$ heißt **f-Vektor** von $\mathcal{K}$.*

Beispiel

- $\mathcal{K}_2 = \{\{0,1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$ *hat f-Vektor* $(1, 3, 1)$

- $\mathcal{K}_{NC} = \{S \subseteq \mathcal{G} \mid S$ *ist nicht-chromatisch* $\}$ *hat f-Vektor*

$$\begin{array}{ccccccccc} (1, & 12, & 66, & 208, & 399, & 456, & 282, & 72, & 3) \\ (f_{-1}, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4, & f_5, & f_6, & f_7) \end{array}$$

Es gibt keine nicht-chromatische Skala mit 9 oder mehr Tönen.

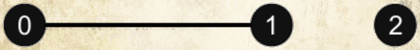
Facetten

Definition

Eine Menge M in einem Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ ist eine **Facette** *von $\mathcal{K}$, falls es keine andere Menge in $\mathcal{K}$ gibt, die M enthält.*

Beispiel

- $\mathcal{K}_2 = \{\{0, 1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$ *hat Facetten* $\{0, 1\}$ *und* $\{2\}$



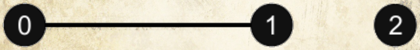
Facetten

Definition

*Eine Menge M in einem Simplizialkomplex $\mathcal{K}$ ist eine **Facette** von $\mathcal{K}$, falls es keine andere Menge in $\mathcal{K}$ gibt, die M enthält.*

Beispiel

- $\mathcal{K}_2 = \{\{0, 1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$ *hat Facetten* $\{0, 1\}$ *und* $\{2\}$



- *Die maximal nicht-chromatischen Skalen sind die Facetten von* $\mathcal{K}_{NC} = \{S \subseteq \mathcal{G} \mid S$ *ist nicht-chromatisch* $\}$.

Facetten von $\mathcal{K}_{NC}$

f-Vektor

$$\begin{array}{ccccccccc} (1, & 12, & 66, & 208, & 399, & 456, & 282, & 72, & 3) \\ (f_{-1}, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4, & f_5, & f_6, & f_7) \end{array}$$

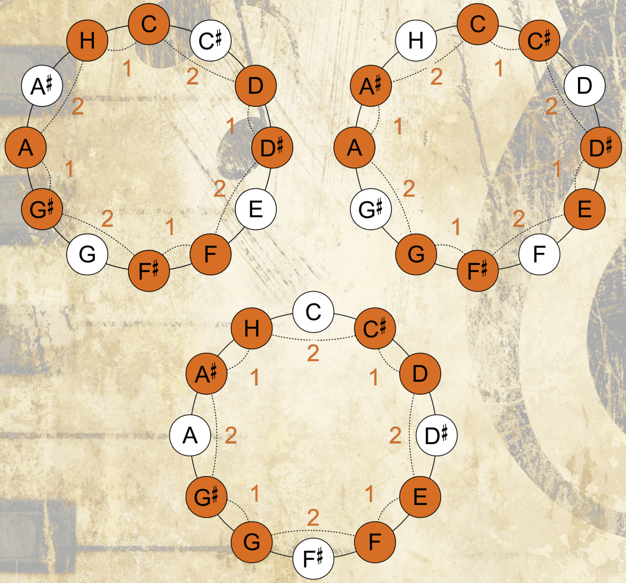
- Es gibt keine nicht-chromatische Skala mit 9 oder mehr Tönen.
- Es gibt 3 Facetten mit 8 Tönen.
- Es gibt mindestens $48 (= 72 - 3 \cdot 8)$ Facetten mit 7 Tönen (z.B. C-Dur).

Facetten von $\mathcal{K}_{NC}$

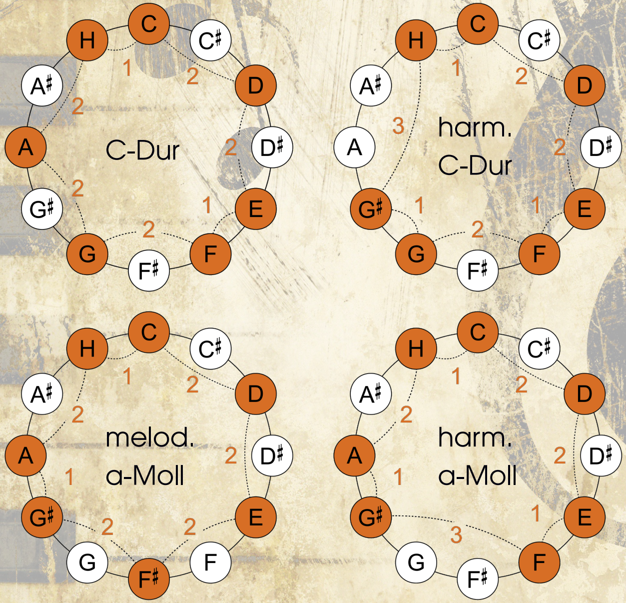
$\mathcal{K}_{NC}$ hat genau 57 Facetten:

Anzahl Töne	Intervallfolge	Anzahl Skalen	Name
8	2-1-2-1-2-1-2-1	3	vermindert
7	2-2-1-2-2-2-1	12	Dur
7	2-1-2-2-2-2-1	12	melodisch Moll
7	2-1-2-2-1-3-1	12	harmonisch Moll
7	2-2-1-2-1-3-1	12	harmonisch Dur
6	2-2-2-2-2-2	2	Ganzton
6	1-3-1-3-1-3	4	übermäßig

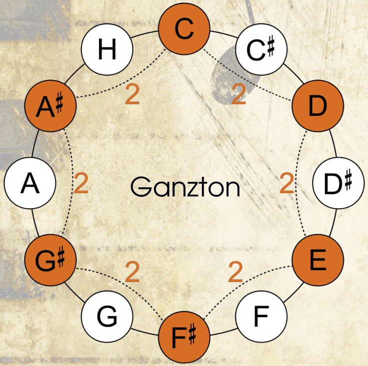
Verminderte Skalen

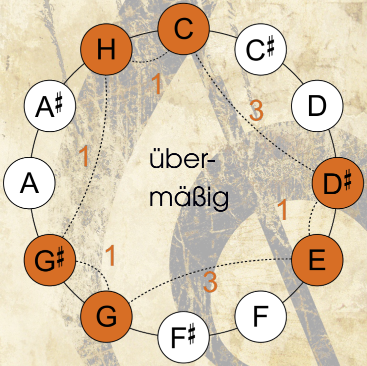


Dur & Moll


C-Dur
C
C♯
D
D♯
E
F
F♯
G
G♯
A
A♯
H
1 2 2 1 2 2 2
harm.
C-Dur
C
C♯
D
D♯
E
F
F♯
G
G♯
A
A♯
H
1 2 2 1 2 1 3
melod.
a-Moll
C
C♯
D
D♯
E
F
F♯
G
G♯
A
A♯
H
1 2 2 2 2 1 2
harm.
a-Moll
C
C♯
D
D♯
E
F
F♯
G
G♯
A
A♯
H
1 2 2 1 3 1 2

Ganzton- & übermäßige Skala

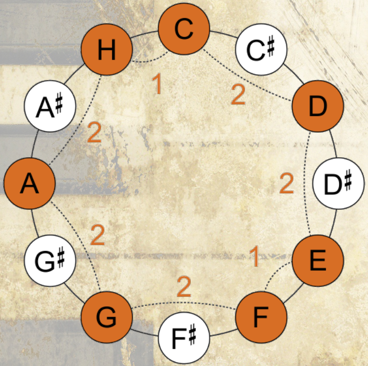




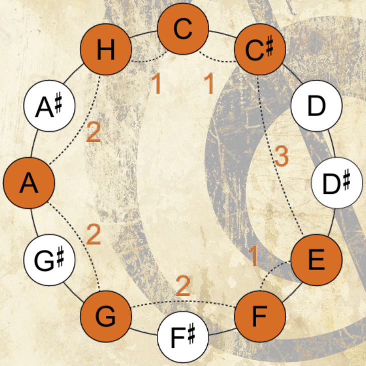
Grundfarben

Definition (Ernst Ulrich Deuker)

*Eine Skala heißt **nicht-chromatisch**, falls ihre Intervallfolge keine 2 aufeinanderfolgenden Halbtonschritte enthält.*



Beispiel

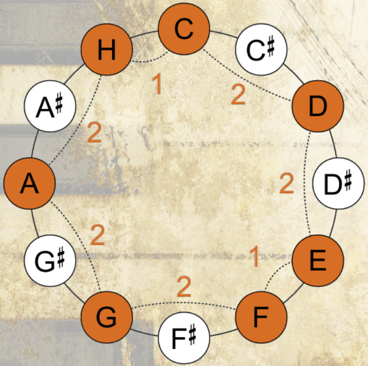


Gegenbeispiel

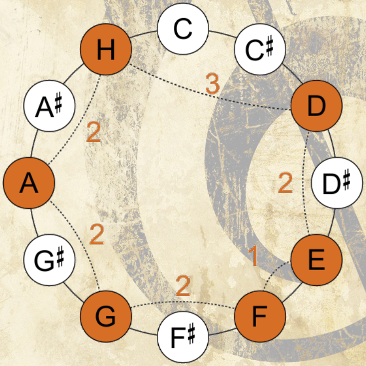
Grundfarben

Definition (Ernst Ulrich Deuker)

*Eine Skala heißt **maximal nicht-chromatisch**, falls sie nicht-chromatisch ist und in keiner anderen nicht-chromatischen Skala enthalten ist.*



Beispiel



Gegenbeispiel

Eine **musikalische** Frage:

Welche Skalen sind maximal nicht-chromatisch?

Nun eine **mathematische** Antwort. . .

Der Simplizialkomplex $\mathcal{K}_{NC}$ der nicht-chromatischen Skalen

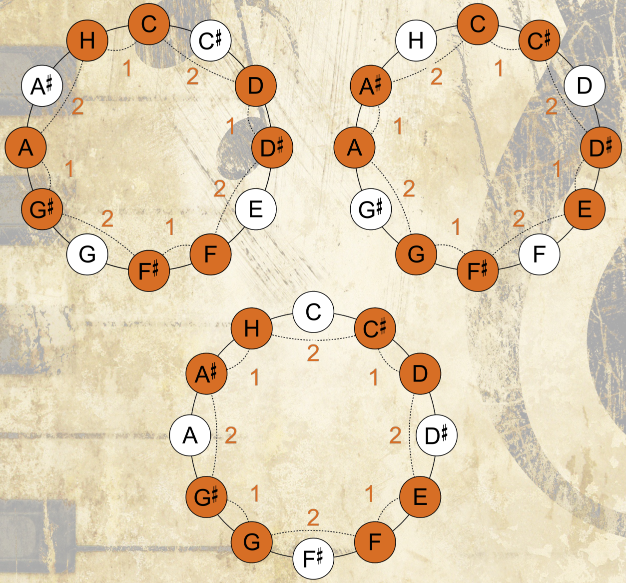
hat genau 57 Facetten:

Anzahl Töne	Intervallfolge	Anzahl Skalen	Name
8	2-1-2-1-2-1-2-1	3	vermindert
7	2-2-1-2-2-2-1	12	Dur
7	2-1-2-2-2-2-1	12	melodisch Moll
7	2-1-2-2-1-3-1	12	harmonisch Moll
7	2-2-1-2-1-3-1	12	harmonisch Dur
6	2-2-2-2-2-2	2	Ganzton
6	1-3-1-3-1-3	4	übermäßig

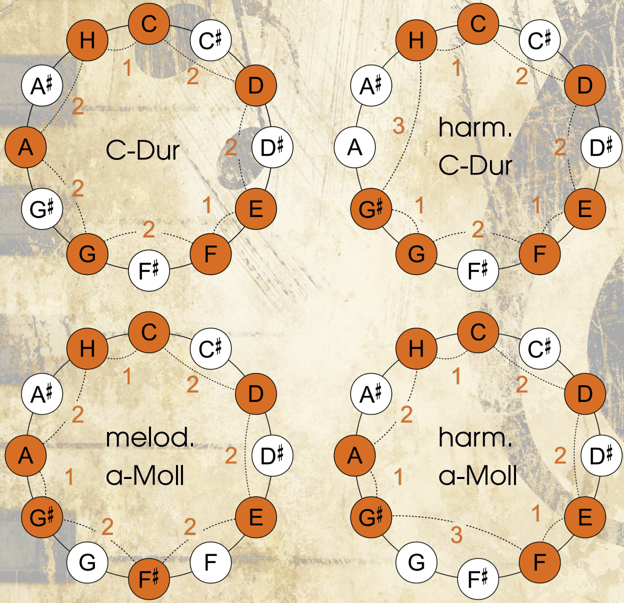
f-Vektor:

$$\begin{array}{ccccccccc} (1, & 12, & 66, & 208, & 399, & 456, & 282, & 72, & 3) \\ (f_{-1}, & f_0, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4, & f_5, & f_6, & f_7) \end{array}$$

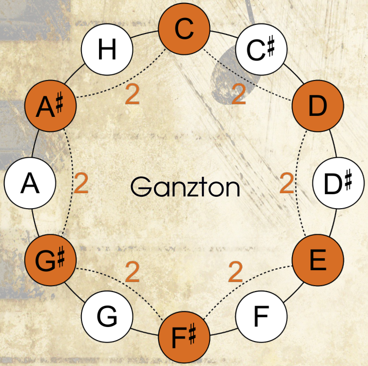
Verminderte Skalen

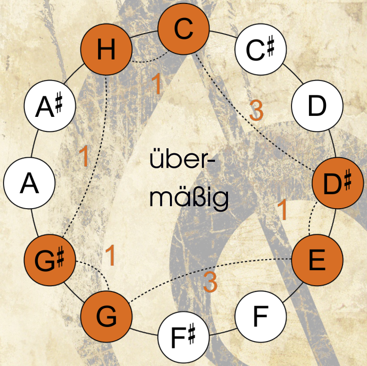


Dur & Moll



Ganzton- & übermäßige Skala





Frage eines Mathematikers:

Welche Topologie hat der Simplizialkomplex $\mathcal{K}_{NC}$?

Musiker und Mathematiker antworten gemeinsam. . .

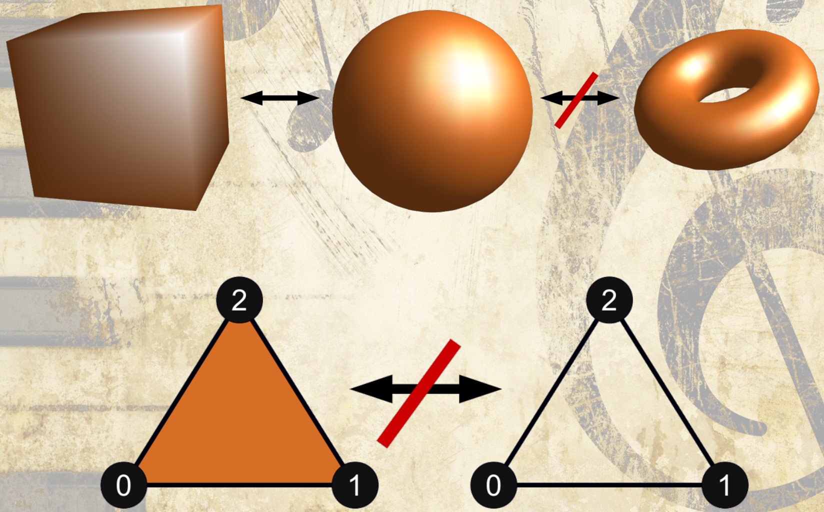
Topologie: Löcher zählen

(Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1236079)

Welche Eigenschaften von Räumen bleiben erhalten, wenn man diese dehnt, staucht, biegt oder verzerrt? (Operationen wie Zerschneiden oder Zusammenkleben sind nicht erlaubt.)

Anzahl von Löchern

Topologie: Löcher zählen



Löcher in Simplizialkomplexen

$$\mathcal{K}_{\blacktriangle} = \{\{0,1,2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0\},\{1\},\{2\},\emptyset\}$$

hat keine Löcher

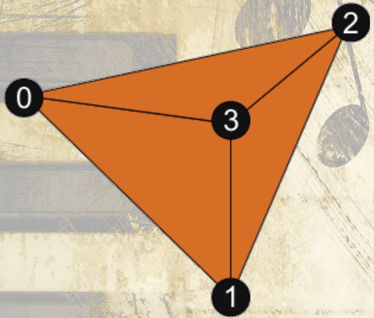
Facetten: $\{0,1,2\}$

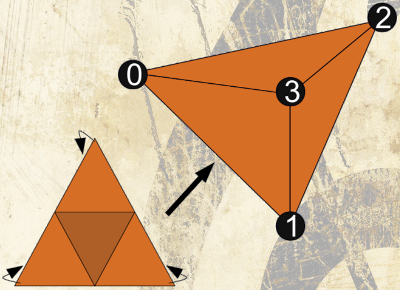
$$\mathcal{K}_{\triangle} = \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0\},\{1\},\{2\},\emptyset\}$$

hat ein 1-dimensionales Loch

Facetten: $\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}$

Löcher in Simplizialkomplexen





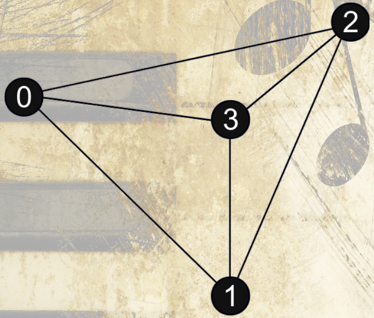
(als solides Objekt)
hat keine Löcher

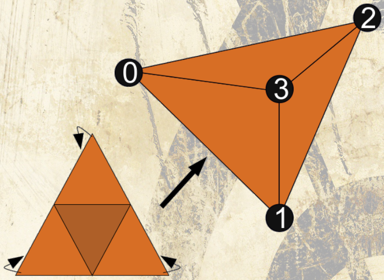
Facetten: $\{0,1,2,3\}$

(als hohles Objekt)
hat ein 2-dimensionales Loch

Facetten:
$\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}$

Löcher in Simplizialkomplexen





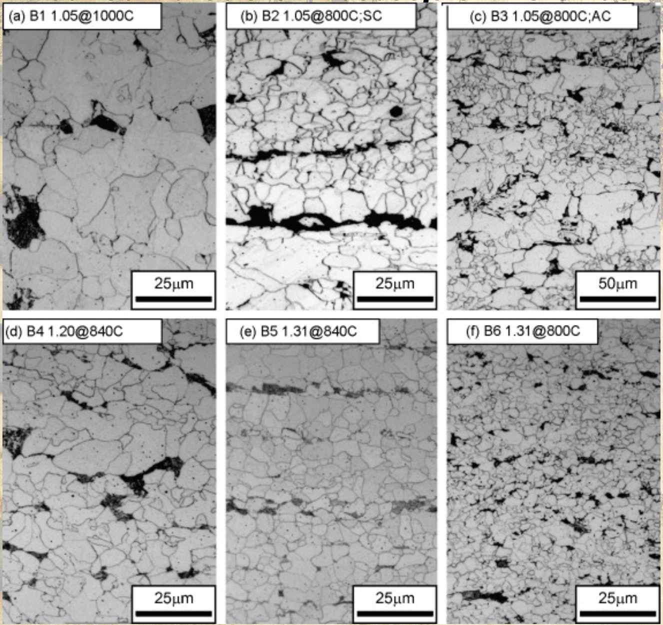
hat **drei** 1-dimensionale Löcher

Facetten:
$\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\},$
$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

(als hohles Objekt)
hat ein 2-dimensionales Loch

Facetten:
$\{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}$

Warum überhaupt Löcher zählen?



(Muszka, Hodgson, Majta, 2009)

Löcher in $\mathcal{K}_{NC}$

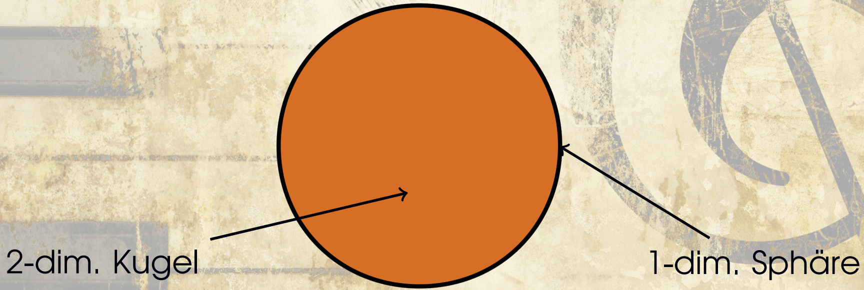
$\mathcal{K}_{NC}$ hat genau 3 Löcher der Dimension 5

- D.h. jedes Loch hat auf dem Rand Hexatoniken (= Skalen mit 6 Tönen)

Löcher in $\mathcal{K}_{NC}$

$\mathcal{K}_{NC}$ hat genau 3 Löcher der Dimension 5

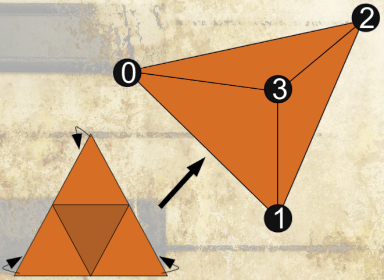
- D.h. jedes Loch hat auf dem Rand Hexatoniken (= Skalen mit 6 Tönen)
- Aus topologischer Sicht bilden die Randskalen eines Loches eine 5-dimensionale Sphäre (d.h. den Rand einer 6-dimensionalen Kugel)



Löcher in $\mathcal{K}_{NC}$

$\mathcal{K}_{NC}$ hat genau 3 Löcher der Dimension 5

- D.h. jedes Loch hat auf dem Rand Hexatoniken (= Skalen mit 6 Tönen)
- Aus topologischer Sicht bilden die Randskalen eines Loches eine 5-dimensionale Sphäre (d.h. den Rand einer 6-dimensionalen Kugel)

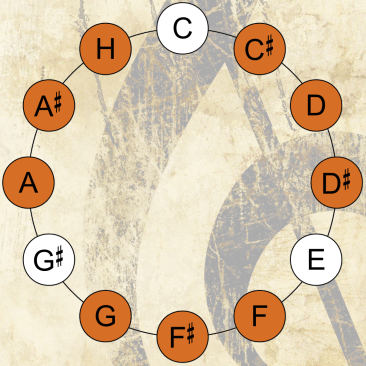


Die 4 Dreiecke auf dem Rand eines Tetraeders bilden eine topologische 2-dimensionale Sphäre.

Was ist die Bedeutung der Löcher?

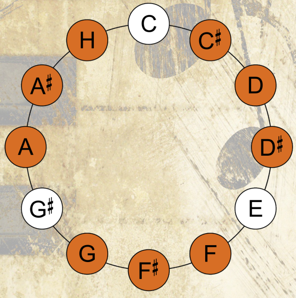
Messiaens Skala (rechts)

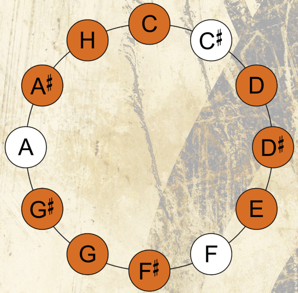
- hat 9 Töne
- enthält 27 nicht-chromatische Skalen mit 6 Tönen

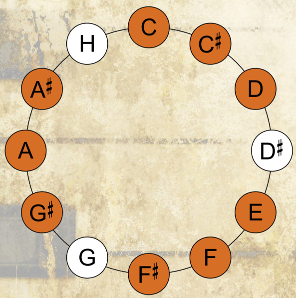


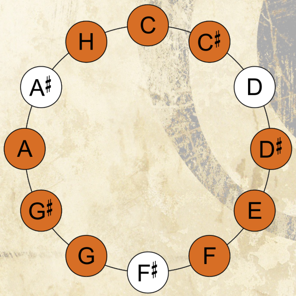
Diese 27 Skalen formen den Rand für ein Loch.

4 Messiaen-Skalen





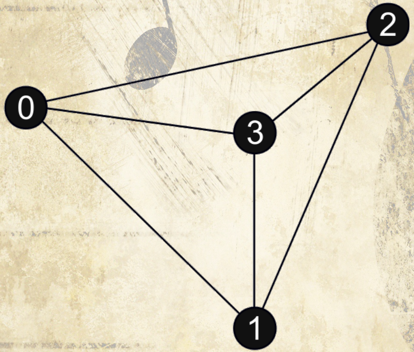




Warum nur 3 Löcher?

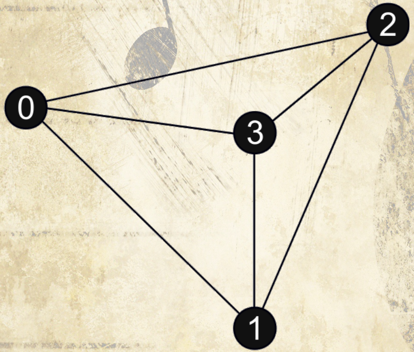
Warum nur 3 Löcher?

Man kann immer nur 3 Löcher gleichzeitig “sehen”



Warum nur 3 Löcher?

Man kann immer nur 3 Löcher gleichzeitig "sehen"



Aus mathematischer Sicht:

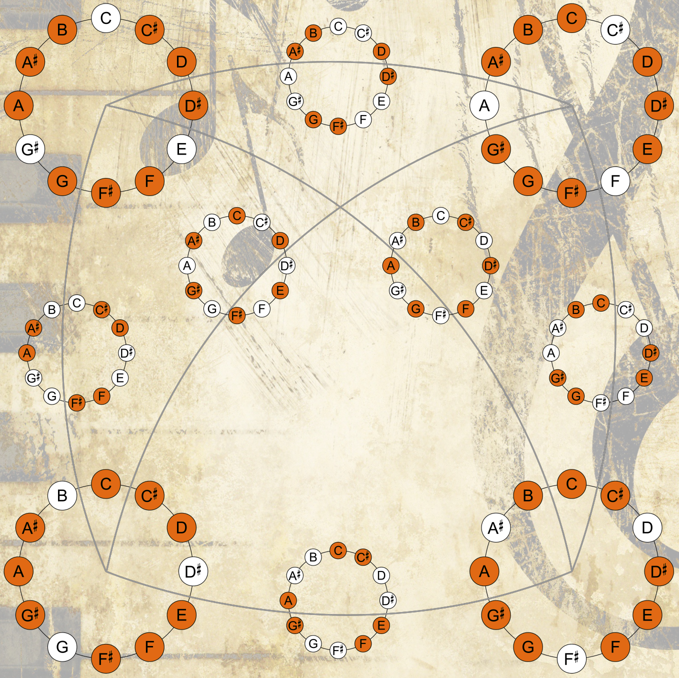
- Die 4 Messiaen-Löcher sind linear abhängig.
- Je 3 davon sind linear unabhängig.

Wie sind die Löcher angeordnet?

Wie sind die Löcher angeordnet?

Der Schnitt der Ränder von 2 Löchern ist eine maximal nicht-chromatische Hexatonik (also eine Facette von $\mathcal{K}_{NC}$!)

Anzahl Töne	Intervallfolge	Anzahl Skalen	Name
8	2-1-2-1-2-1-2-1	3	vermindert
7	2-2-1-2-2-2-1	12	Dur
7	2-1-2-2-2-2-1	12	melodisch Moll
7	2-1-2-2-1-3-1	12	harmonisch Moll
7	2-2-1-2-1-3-1	12	harmonisch Dur
6	**2-2-2-2-2-2**	**2**	**Ganzton**
6	**1-3-1-3-1-3**	**4**	**übermäßig**

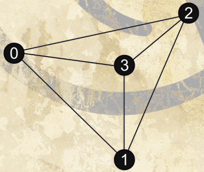

C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B

Wie sind die Löcher angeordnet?

Der Schnitt der Ränder von 2 Löchern ist eine maximal nicht-chromatische Hexatonik (also eine Facette von $\mathcal{K}_{NC}$!)

Anzahl Töne	Intervallfolge	Anzahl Skalen	Name
8	2-1-2-1-2-1-2-1	3	vermindert
7	2-2-1-2-2-2-1	12	Dur
7	2-1-2-2-2-2-1	12	melodisch Moll
7	2-1-2-2-1-3-1	12	harmonisch Moll
7	2-2-1-2-1-3-1	12	harmonisch Dur
6	**2-2-2-2-2-2**	**2**	**Ganzton**
6	**1-3-1-3-1-3**	**4**	**übermäßig**

Der Schnitt der Ränder von mind. 2 Löchern ist ein Simplex



Wo sind die Facetten mit 7 und 8 Tönen?

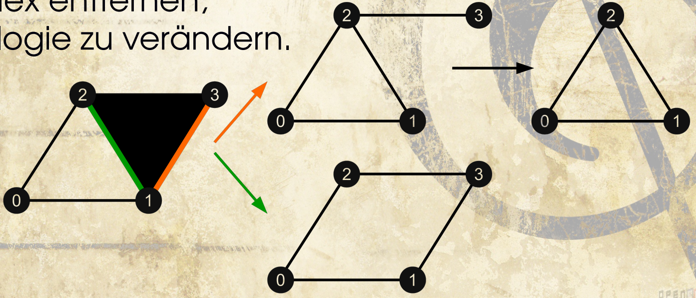
Wo sind die Facetten mit 7 und 8 Tönen?

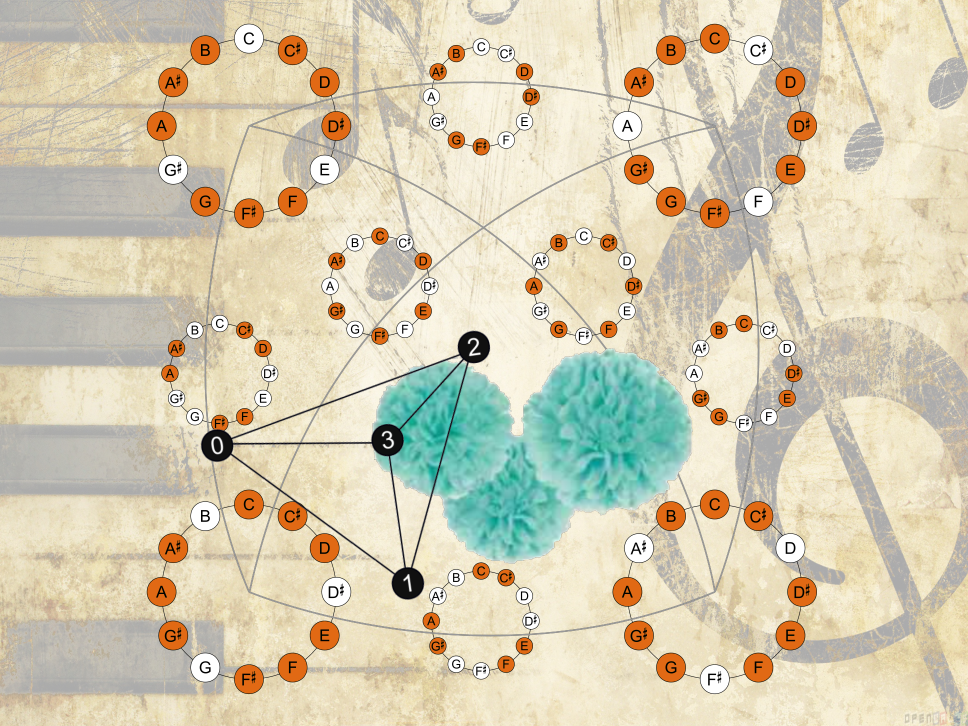
Sie sitzen außen um die Löcher herum!

Wo sind die Facetten mit 7 und 8 Tönen?

Sie sitzen außen um die Löcher herum!

Wir können sie mit “**Kollapsen**” aus dem Simplizialkomplex entfernen, ohne die Topologie zu verändern.




0
1
2
3
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B
C C♯ D D♯ E F F♯ G G♯ A A♯ B